F315 Mecânica Clássica I
Turma B
2^o Semestre de 2017
Teste 2

Nome: RA: Assinatura :

Dados:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{B^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{B}\right) \tag{1}$$

a função $D = \arcsin C$ é a função inversa da função seno, as vezes é escrita como $D = \sin^{-1} C \rightarrow \sin D = C$

1. (10.0 pontos) Considere uma massa m presa a uma mola de constante k e que apenas se move no eixo horizontal x. Assuma que estamos numa única dimensão espacial. Assuma que colocarmos a origem do sistema de coordenadas no ponto de equilíbrio da mola. No tempo inicial t=0, a massa está em repouso e está localizada no ponto máximo de deslocamento $x_{\max} = A$, onde A é uma constante, em relação a origem do sistema de coordenadas..

   (a) (2.0 pontos) Escreva a energia deste sistema em termos da massa m, da constante da mola k, e da velocidade $v = \dfrac{dx}{dt}$ e da posição x da mola. Mostre claramente as informações usadas.

   Resposta:

   Como a única força presente é a força elástica, então o sistema tem energia total constante. A força elástica pode ser representada por um potencial $U = -\int F dx = \dfrac{kx^2}{2}$. Então a energia total é

$$E = \text{constante} = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} \tag{2}$$

   (b) (1.0 pontos) Mostre que no instante inicial temos que $E = \dfrac{1}{2}kA^2$. Mostre claramente as informações usadas.

   Resposta:

   No instante inicial temos $x(t=0) = A$ e $\dot{x}(t=0) = 0$, então a energia total é dada por

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{kx^2}{2}\Bigg|_{x(t=0)=A \quad \dot{x}(t=0)=0} = \frac{kA^2}{2} \tag{3}$$

   (c) (3.0 pontos) Escreva o tempo t em função de uma integral <u>definida</u> que depende da posição x da mola, da energia E do sistema massa-mola, e da da massa m, da constante da mola k. Não é necessário resolver esta integral. Você obterá uma função t=t(x) de forma <u>implícita</u>.

Resposta:
Da expressão da energia podemos ter

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} \tag{4}$$

Podemos isolar o tempo esta equação:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)} \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{kx^2}{2}\right)}} \tag{5}$$

Integrando de 0 até t, e de x(t=0)=A até x=x(t) temos

$$\int_0^t dt' = t(x) = \int_A^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{k(x')^2}{2}\right)}} \tag{6}$$

(d) (2.0 pontos) Resolva a integral do item (c) e ache a forma explícita de t=t(x). e ache a função inversa, x=x(t). Resolvendo de outra forma para obter x=x(t) não será considerado.

Resposta:
Usando o formulário temos:

$$t(x) = \int_A^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{2E}{k} - (x')^2\right)}} \qquad \sqrt{\frac{k}{m}}t = \arcsin\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right)\Bigg|_{x(0)=A}^{x} =$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) - \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t == \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) - \frac{\pi}{2}$$

onde na última linha usamos o fato que $E = \frac{KA^2}{2}$ que implica que $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ e que $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. Invertendo a equação temos:

$$\left(\frac{x(t)}{\sqrt{\frac{2E}{k}}}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{7}$$

(e) (2.0 pontos) Mostre que a solução obtida no item (d) tem uma única frequência de movimento e calcule o período do movimento. Resolvendo de outra forma para obter o período não será considerado.

Resposta:

A função obtida é uma função harmônica, com uma única frequência $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. O período associado corresponde a mudança da fase por 2π, então

$$wT = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{8}$$