F315 Mecânica Clássica I
Turma B
2^o Semestre de 2017
Prova 3

Nome: RA: Assinatura :

Dados:

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \qquad H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad E = T + U \\
p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \\
T &= \sum_{ij} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + c \qquad U(q_i, \dot{q}_i) = U^{(0)}(q_i) + U^{(1)}(q_i, \dot{q}_i) \\
& \text{iff} \qquad b_i = c = U^{(1)}(q_i, \dot{q}_i) = 0 \qquad\qquad H = E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{AD - BC}\right)\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}
$$

Coordenadas esféricas mostradas na Figura 1 :

$$
\vec{r} = r\,\hat{r} \quad \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + (r\dot{\theta})\,\hat{\theta} + (r\sin\theta\dot{\phi})\,\hat{\phi} \tag{1}
$$

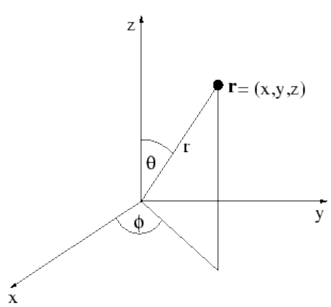


Figura 1: Sistema de coordenadas esférico.

1. (3.2 pontos) Seja a Figura 2(a) que representa uma partícula de massa m em cima de uma cunha de massa M. Tanto a partícula de massa m como a cunha de massa M estão andando numa superfície sem atrito e sob ação da gravidade.

   (a) (1.2 pontos) Quais são as variavéis para descrever as duas partículas deste sistema? Descreve de forma clara o sistema de coordenadas usado e com isto escreva o Lagrangiano deste sistema.
   Resposta:
   As variáveis do sistema são a posição horizontal e vertical da massa m e da cunha M. Chamaremos estas variáveis de x, e y para a posiç ao horizontal e vertical da massa m **em relação** á cunha e $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ para a a posição horizontal e vertical da cunha de massa M. Fixaremos o sistema de referência em relção ao canto mais a esquerdo da Figura 2(a). Neste sistema de referência então as variáveis da massa m são $x_m = x + \mathcal{X}$ e $y_m = y + \mathcal{Y}$ em relção ao canto mais a esquerdo da Figura 2(a). A posição da cunha de massa M é dado por $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.
   Um dos vínculos do sistema é que $\mathcal{Y}$=0 e que a altura da massa m em relação á cunha é dada por $y = x \tan \alpha$.

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathcal{X}}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \tag{2}$$

   e com os vínculos de $\mathcal{Y}$=0 e $y = x \tan \alpha$:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathcal{X}}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tan^2 \alpha - mgx \tan \alpha \tag{3}$$

   (b) (1.4 pontos) Quais são as quantidades conservadas neste sistema? Explique o porquê desta conservação **usando o formalismo Lagrangiano**.
   Resposta:
   Neste caso existe uma coordenada cíclica $\mathcal{X}$. Então pelo formalismo Lagrangiano o momento generalizado corresponde é conservado:

$$p_{\mathcal{X}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{X}}} = M\dot{\mathcal{X}} + m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right) \tag{4}$$

   o Lagrangiano não depende do tempo então o Hamiltoniano é conservado. Como o Lagrangiano é uma função quadrática das velocidades e o potencial não depende da velocidade então a energia=Hamiltoniano é conservado.

$$H = \frac{1}{2}M\dot{\mathcal{X}}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\tan^2\alpha + mgx\tan\alpha \tag{5}$$

Escrevendo em função dos momenta:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\tan^2\alpha + m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right) \tag{6}$$

Resposta:
Neste caso o Lagrangiano não depende de $\mathcal{X}$ e portanto $p_{\mathcal{X}}$ é conservado. A quantidade

$$p_{\mathcal{X}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{X}}} = m\dot{\mathcal{X}} + m\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right) \tag{7}$$

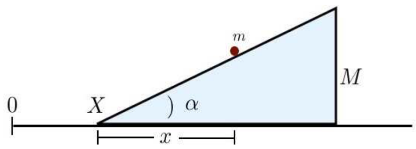
corresponde ao momento linear do sistema. Temos que

$$H = \frac{1}{2}M\dot{\mathcal{X}}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}} + \dot{x}\tan\alpha\right)^2 - 2\frac{m}{2}\left(\dot{x} + \dot{\mathcal{X}}\right)\dot{x}\tan\alpha + mgx\tan\alpha \tag{8}$$

(c) (0.6 pontos) Qual são as simetrias que correspondem as quantidades conservadas do item anterior? Use o Teorema de Emmy Noether, a matemática da Figura 2(b) para associar as simetrias e as quantidades conservadas.

Resposta
Neste caso como o Lagrangiano é invariante por uma translação temporal, $t \to t' = t + f$, onde f é uma constante. Como o Lagrangiano não depende do tempo, ele não muda, e as velocidades são invariantes por translações constantes. Então o Lagrangiano é invariante. A conseqûencia é que o Hamiltoniano é constante. O Lagrangiano dada na Eq. 8 depende apenas da coordenada x, e não depende da coordenada $\mathcal{X}$. Então se fizermos uma translação espacial da forma $\mathcal{X} \to \mathcal{X} = \mathcal{X}$+c, onde c é uma constante o Lagrangiano é invariante. A consequência é qualquer invariança por translação espacial significa que o momento linear corresponde é conservado.

Nada pode ser dito a respeito de invariança por rotações por este sistema ser unidimensional.



(a) Uma partícula de massa m em cima de uma cunha de massa M.

(b) Emmy Noether

2. (3.0 pontos) Uma partícula carregada de massa m sob a ação de campo magnético uniforme na direção z tem o lagrangiano dado por

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - q\Phi + q\vec{v}.\vec{A} \tag{9}$$

onde o vetor posição da partícula é $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ é a velocidade da partícula , $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ é o potencial escalar e $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ é o potencial vector que estão relacionados com o campo elétrico por $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ e com o campo magnético por $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Para um campo magnético uniforme B_0 na direção z, temos que $\Phi = 0$ e $\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}B_o y\right)\hat{x} + \left(\frac{1}{2}B_0 x\right)\hat{y}$.

(a) (2.0 pontos) Ache o Hamiltoniano do sistema em função das coordenadas e dos momentos e calcule as seis **equações** de Hamilton correspondentes.

Resposta

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\dot{x}A_x + q\dot{y}A_y = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \left(\frac{qB_o}{2}\right)(-\dot{x}y + \dot{y}x) \tag{10}$$

Os momentos são

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - y\left(\frac{qB_o}{2}\right) \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + x\left(\frac{qB_o}{2}\right) \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{11}$$

O Hamiltoniano é

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \dot{x}\left(m\dot{x} - y\left(\frac{qB_o}{2}\right)\right) + \dot{y}\left(m\dot{y} + x\left(\frac{qB_o}{2}\right)\right) + m\dot{z}^2 \\ & -\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \left(\frac{qB_o}{2}\right)(-\dot{x}y + \dot{y}x) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \\ & \left(\frac{1}{2m}\right)\left(p_x + y\left(\frac{qB_o}{2m}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)\left(p_y - x\left(\frac{qB_o}{2m}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2m}\right)p_z^2 \quad (12) \end{aligned}$$

na uúltima igualdade o Hamiltoniano já está escrito na forma correta, em termos das coordenadas x,y e dos momenta p_X, p_y,p_z. As equações de Hamilton são

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} \quad \dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z}(13)$$

As três primeiras equações acima são iguais as Eqs. 11. As outras três equações são

$$\dot{p_x} = -\left(\frac{qB_o}{2m^2}\right)\left(p_y - x\left(\frac{qB_o}{2m}\right)\right) \quad \dot{p_y} = -\left(\frac{qB_o}{2m^2}\right)\left(p_y + y\left(\frac{qB_o}{2m}\right)\right) \quad \dot{p_z} = 0(14)$$

(b) (1.0 pontos) Quais são as quantidades conservadas deste sistema?

Resposta

Como visto acima p_z é uma constante e como o Lagrangiano é independente do tempo, então o Hamiltoniano é conservado.

3. (3.8 pontos) Seja um partícula de massa m, conforme mostrada na Figura 2(c) presa a um apoio por uma fio de comprimento fixo l sob a ação da gravidade e que pode andar livremente em qualquer direção.

(a) (1.4 pontos) Ache o Lagrangiano deste sistema.

Resposta:

Neste sistema o fio tem um comprimento fixo, então a distância R entre o ponto de apoio e a massa m é constante, r=l. Neste caso podemos escrever o Lagrangiano como

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - mgl(1-\cos\theta) \tag{15}$$

onde a energia cinética, $T = \dfrac{mv^2}{2}$ é obtida a partir da velocidade dada no formulário e a energia potencial U=mgy.

As coordenadas independentes são θ e ϕ então temos duas equações de Euler-Lagrange e dois momenta generalizado.

(b) (0.6 pontos) Ache os momentos generalizados deste sistema.

Resposta:

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{16}$$

Invertendo as equações temos

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta} \tag{17}$$

(c) (1.3 pontos) Ache o Hamiltoniano deste sistema e as equações de Hamilton deste sistema.

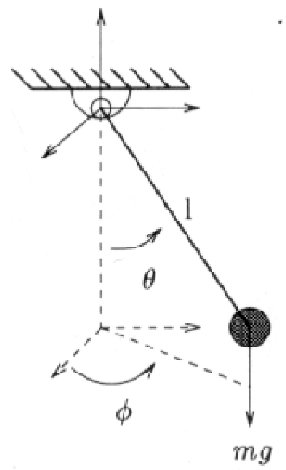
Resposta:

Para acharmos o Hamiltoniano,

$$H = \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L = \tag{18}$$

usando as Eqs.(17 temos que

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{p_\theta}{ml^2}\right)p_\theta + \left(\frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}\right)p_\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta^2}{ml^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}\right) \\ &+ mgl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\theta^2}{ml^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{p_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}\right) + mgl(1-\cos\theta) \end{aligned}$$



(c) Pêndulo esférico: Partícula de massa m presa a um suporte por um fio de comprimento l.

Figura 2: Pêndulo esférico: Partícula de massa m presa a um suporte por um fio de comprimento l.

Duas das equações de Hamilton são as Eqs.17, e as outras duas são

$$\dot{p_\theta} \equiv -\frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\cos\theta \quad \dot{p_\phi} \equiv -\frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} = 0 \tag{19}$$

(d) (0.5 pontos) Quais são as quantidades conservadas neste sistema?

Resposta

Neste caso as quantidades conservadas são o momento generalizado na direção ϕ e o Hamiltoniano.