Mecânica Geral

Vamos lembrar que de forma geral,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \overset{m \text{ constante.}}{=} m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ddot{\vec{r}}$$

Na natureza existem poucos exemplos nos quais $\vec{F}$ é uma constante. De forma mais completa, $\vec{F}$ é sempre função de outros parâmetros.

Aqui escrevemos que

$$\vec{F} \longrightarrow \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\ddot{\vec{r}}$$

Em 1-D essa equação se reduz a

$$F(x, v_x, t) = m\ddot{x} = m\dot{v}_x$$

Uma vez conhecidas as constantes iniciais do movimento $\vec{r}(0)$ e $\vec{v}(0)$, resolvendo a equação diferencial

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$

tem-se a solução do problema de dinâmica.

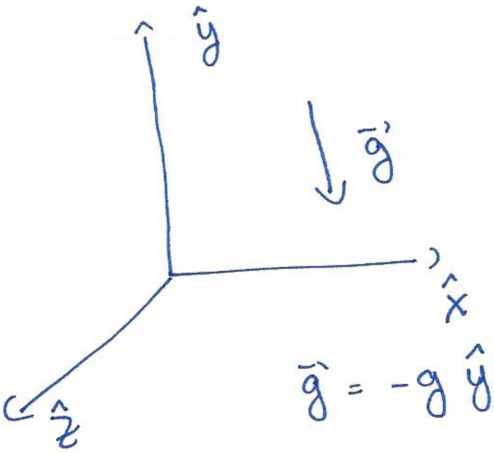
Vale também salientar que em um sistema no qual existem N forças atuando, a força resultante,

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

é a força que deve ser usada na solução do problema.

Vamos analisar o caso mais simples, ou seja, o caso em que $\vec{F}$ = constante.

força peso $\quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\hat{y}$



$\vec{g} = -g\,\hat{y}$

de forma mais completa

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2}\,\hat{r}$$

para regiões próximas à superfície $R \simeq$ constante

$\Rightarrow \vec{F} \simeq -mg\,\hat{y}$

$\therefore \quad m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\,\hat{y}$

separando as componentes temos

$$\begin{cases} \hat{x}: & m\ddot{x} = 0 \\ \hat{y}: & m\ddot{y} = -mg \\ \hat{z}: & m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

O problema em $\hat{x}$ e $\hat{z}$ é o mesmo, só mudam as condições iniciais

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$$

O problema é então escrito como:

$$\hat{x} : m\ddot{x} = m\dot{v}_x = 0 \quad \therefore \quad v_x = \text{constante} = v_{x0}$$

$$\hat{z} : m\ddot{z} = m\dot{v}_z = 0 \quad \therefore \quad v_z = \text{constante} = v_{z0}$$

$$\hat{y} : m\ddot{y} = m\dot{v}_y = -mg \quad \therefore$$

$$\int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g\,dt \Rightarrow$$

$$v_y - v_{0y} = -gt \quad \therefore \quad v_y(t) = v_{0y} - gt$$

para a posição temos:

$$\hat{x} : \quad \dot{x} = v_{0x} \quad \therefore \quad x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

$$\hat{y} : \quad \dot{y} = v_y = v_{0y} - gt \quad \therefore \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\hat{z} : \quad \dot{z} = v_{0z} \quad \therefore \quad z(t) = z_0 + v_{0z}t$$

Desta forma escrevemos:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{x} + (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{y} + (z_0 + v_{0z}t)\hat{z}$$

ou ainda:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{(x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z})}_{\vec{r}_0} + \underbrace{(v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z})}_{\vec{v}_0}.t - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}}$$

Se um corpo é lançado com uma velocidade tal que tenha uma componente horizontal, podemos escolher um sistema de coordenadas na qual o movimento do corpo fique em apenas duas dimensões com origem em $\vec{r}_0 = (0,0,0)$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$$

desta forma $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}$

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Se substituirmos $t = \frac{x}{v_{0x}}$ na equação de $y(t)$

temos que

$$y(x) = \underbrace{\left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}}\right) x - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v_{ox}^2}\right) x^2}_{\text{parábola!}}$$

para encontrarmos o alcance máximo e a altura máxima atingida pelo corpo temos:

Alcance: quando $y = 0$ ∴

$x = 0$ ou $\dfrac{v_{oy}}{v_{ox}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_{ox}^2} x_{MAX} = 0$

↳ posição inicial

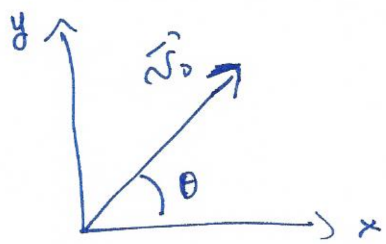
$$\therefore \quad x_{máx} = 2 . \frac{v_{oy} v_{ox}}{g}$$

e a altura máxima ocorre quando $\dfrac{dy}{dx} = 0$

ou $\dfrac{v_{oy}}{v_{ox}} - \dfrac{g}{v_{ox}^2} x = 0$ ∴ $x_{hmáx} = \dfrac{v_{ox} v_{oy}}{g}$

e $y_{máx} = \dfrac{v_{oy}}{\cancel{v_{ox}}} \cdot \dfrac{\cancel{v_{ox}} v_{oy}}{g} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cancel{g}}{\cancel{v_{ox}^2}} \cdot \dfrac{\cancel{v_{ox}^2} v_{oy}^2}{g^2}$

$\boxed{y_{máx} = \dfrac{v_{oy}^2}{2g}}$ ⟹ tomando θ como o ângulo de lançamento, de modo que



$v_{ox} = v_0 \cos\theta$

$v_{oy} = v_0 \operatorname{sen}\theta$

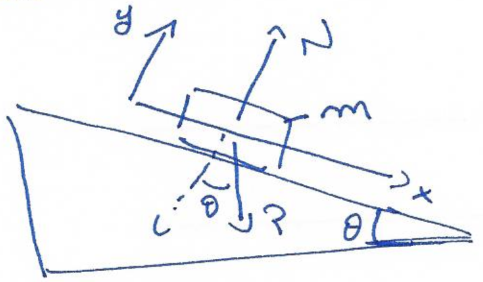
desta forma

$$x_{máx} = \frac{2 v_{oy} v_{ox}}{g} = \frac{2 v_0^2 \overbrace{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}^{\operatorname{sen}(2\theta)}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta$$

$\therefore$ o alcance máx se dá quando $\frac{dx_{máx}}{d\theta} = 0$

$\therefore \quad \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta = 0 \quad \therefore \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \pi/4}$

Vamos olhar agora o caso do plano inclinado:



Neste caso, a aceleração é dada por:

$$m\ddot{y} = N + P\cos\theta$$

$$m\ddot{x} = P\operatorname{sen}\theta$$

Mas $N = -P\cos\theta \quad \therefore \quad m\ddot{y} = 0$ e

$$m\ddot{x} = P\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = g\sin\theta} \Rightarrow$$

Vamos agora colocar atrito no problema:

μ_s = coef. de atrito estático

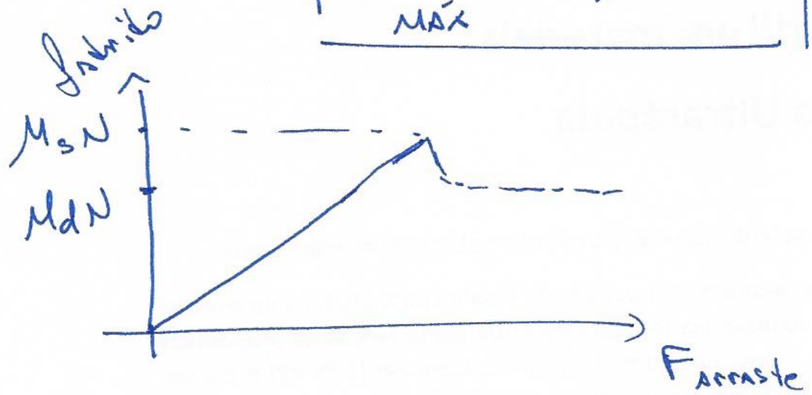
μ_d = coef. de atrito dinâmico

$\Big\}\ \mu_s > \mu_d$

A força de atrito aumenta (para o corpo em repouso) à medida que a força de arrasto aumenta até $\underline{\mu_s \cdot N}$

A maior força de atrito é

$$\boxed{f_{\substack{atrito \\ máx}} = \mu_s . N}$$



Mantendo o sistema de coordenadas, o problema do plano inclinado torna-se

$$\hat{y} : \quad N - P\cos\theta = 0$$

$$\hat{x} : \quad -f_s + P\sin\theta = m\ddot{x}$$

onde $f_s = \mu_s . N = \mu_s P\cos\theta$

$\therefore$ se não há movimento, $\ddot{x} = 0$ e

$-\mu_s P\cos\theta + P\sin\theta = 0 \Rightarrow$ o maior ângulo possível p/ não haver movimento é

$$-\mu_s . \cos\theta_c + \sin\theta_c = 0 \quad \therefore \quad \boxed{tg\,\theta_c = \mu_s}$$

θ_c = ângulo crítico

Quando o corpo começa a mover-se,

$$f_s \rightarrow f_d = \mu_d N \quad e$$

$m\ddot{x} = P\sin\theta - \mu_d P\cos\theta \Rightarrow$ usando que $P = mg$

$$\boxed{a_x = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)}$$

1) Uma vez em movimento, o que deve ocorrer com o ângulo θ p/ que o movimento seja com $V_x = \text{const.}$?

2) Porque $\mu_s > \mu_d$?

Força dependente do tempo

$$\vec{F}(t) = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$

Neste caso temos:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{m}(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\int_0^t \vec{F}(t')\,dt'$$

e $\cancel{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\,dt'$$

Uma partícula de massa m está submetida a uma força da forma:

$$\vec{F}(t) = F_0 (1 + \text{sen}\,\omega t)\,\hat{x}$$

onde F_0 e ω são constantes. Calcular $x(t)$ se $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$