Vamos resolver alguns exemplos:

1º) Considere 2 partículas de mesma massa "m".

As forças sobre as massas são: $\vec{F}_1 = 0$ e $\vec{F}_2 = F_0 \hat{x}$

Ambas estão inicialmente na origem com $\vec{v}_1(0) = v_0 \hat{x}$

e $v_2(0) = 0$

a) calcular a posição, velocidade e aceleração do C.M.

Podemos resolver de 2 formas:

1) Acha $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e depois encontra o do C.M.

2) faz direto p/ o C.M.

No segundo caso temos

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_k \vec{F}_k^{ext} = F_0 \hat{x} + 0 = 2m\ddot{\vec{R}}$$

$$\therefore \ddot{\vec{R}} = \frac{F_0}{2m} \hat{x}$$

$$\vec{V}_0 = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \frac{1}{M} = \frac{\cancel{m} v_0}{2\cancel{m}} \hat{x} = \frac{1}{2} v_0 \hat{x}$$

$$\vec{R}_0 = 0\hat{x} + 0\hat{y}$$

Problema fica em 1-D

$$\therefore \quad \dot{R} = V(t) - V(0) = \int_0^t \ddot{R}(t)\,dt =$$

$$\vec{V}(t) = \left[\frac{1}{2} v_0 + \frac{F_0}{2m} t\right]\hat{x} \Rightarrow R(t) - R(0) = \int_0^t V(t)\,dt$$

$$\therefore \quad \vec{R}(t) = \left[\frac{1}{2} v_0 t + \frac{F_0}{4m} t^2\right]\hat{x}$$

b) Momento linear e energia cinetica do ~~prob~~ sistema

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = 2m \cdot \left[\frac{1}{2} v_0 + \frac{F_0}{2m} t\right]\hat{x} = (m v_0 + F_0 . t)\,\hat{x}$$

Agora, $T = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_k \frac{m}{2} v_{k'}^2$ ↳ velocidade em relação ao C.M.

ou ainda

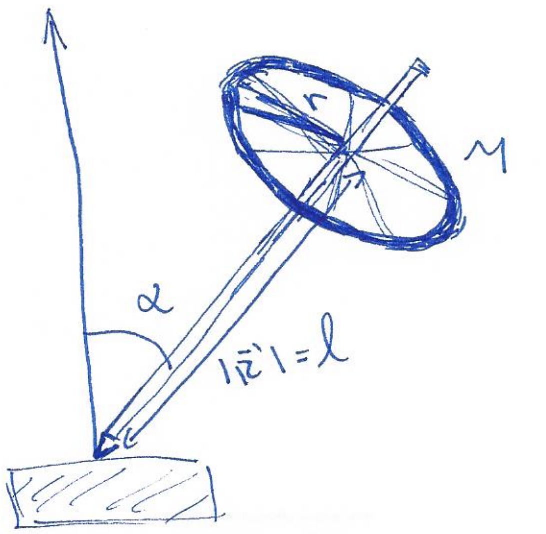
$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^2 \Rightarrow \quad V_1(t) = V_0$$

$$V_2(t) = \frac{F_0}{m} t$$

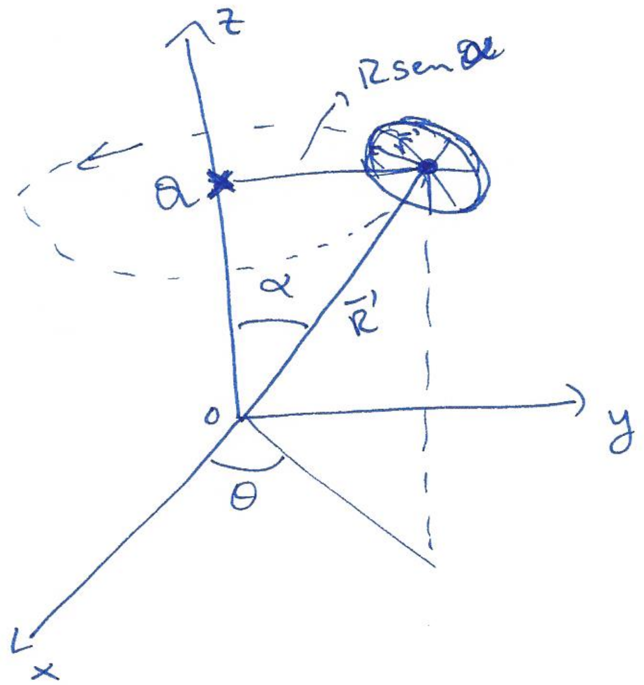
$$\therefore \quad T = \frac{1}{2} m \left[V_0^2 + \left(\frac{F_0}{m} t\right)^2\right]$$

Caso do Giroscópio

Se um giroscópio de massa M num anel de raio ~~r~~ gira com velocidade ω, num cone de ângulo α, qual a sua velocidade de precessão, Ω?



⟹



O momento angular total do sistema é:

$$\vec{L}' = \vec{L}'_{CM} + \sum_k \vec{L}'_{kCM}$$

$$\vec{L}'_{CM_Q} = M \cdot \vec{R}'_Q \times \frac{d\vec{R}'_Q}{dt} =$$

↳ vamos escolher um ponto Q adequado que facilite a resolução

tomando Q como mostrado acima:

$$\vec{L}_{CM_Q} = M \cdot \cancel{R} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot l \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\theta}\, \hat{z}$$

$\dot{\theta}$ é a velocidade de precessão, Ω.

Já, o segundo termo da equação de $\vec{L}$ temos:

$$\sum_k \vec{L}_{km} \Rightarrow \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \omega \cdot \cancel{r}\, d\theta \cdot \frac{M}{2\pi \cancel{r}}$$

$dl = r\,d\theta$

$\rho = \frac{M}{2\pi r}$

$dm = \rho\, dl$

$$\hookrightarrow \vec{L}_{cmk} = \overset{''}{m_k} \cdot r(r\overset{''\,\omega}{\dot{\varphi}}) \cdot \hat{R}$$

$\hookrightarrow$ em relação ao CM.

$$\vec{L}_{\omega} = M r^2 \cdot \omega \cdot \hat{R} = M r^2 \omega \cdot (\operatorname{sen}\alpha \cos\theta\, \hat{i} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta\, \hat{j} + \cos\alpha\, \hat{k})$$

$$\therefore \vec{L}_{total} = M r^2 \omega (\operatorname{sen}\alpha\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta\,\hat{j} + \cos\alpha\,\hat{k}) + M l^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \Omega\, \hat{k}$$

Por outro lado, o torque do sistema é dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \overset{\text{peso}}{\vec{P}} = Mgl \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\theta & \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta & \cos\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -Mgl(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta\, \hat{i} - \operatorname{sen}\alpha \cos\theta\, \hat{j})$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = M r^2 \omega \cdot (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\theta}\, \hat{i} + \operatorname{sen}\alpha \cos\theta\, \dot{\theta}\, \hat{j})$$