$\therefore \quad Mgl = Mr^2\omega\dot{\theta} = Mr^2\omega\Omega$

$$\therefore \quad \boxed{\Omega = \frac{gl}{\omega r^2}}$$

Agora, se a distância entre ~~~~ cada duas ~~~~ partículas do sistema é mantida constante, temos que o corpo é um <u>CORPO</u> <u>RIGIDO</u>

Neste caso

$$|\vec{r}_{jk}| = |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = \text{constante}$$

Assim, as forças internas não fazem trabalho:

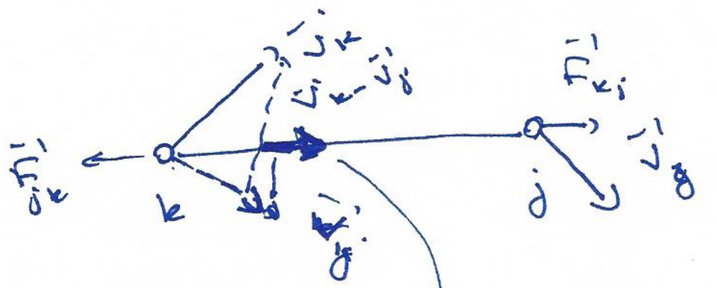
$$\vec{F}_{j\to k} = -\vec{F}_{kj} \Rightarrow$$

$$dw_{\substack{jk \\ 1\to 2}} = \vec{F}_{jk} \cdot \vec{v}_k$$

$$dw_{\substack{kj \\ 1\to 2}} = \vec{F}_{kj} \cdot \vec{v}_j = -\vec{F}_{jk} \cdot \vec{v}_j$$

$$\therefore \quad dw_{jk} + dw_{kj} = \vec{F}_{jk} \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_j) \quad \therefore$$

Agora, se o corpo é rígido, "k" e "j" são conectados por uma haste rígida:



$$\vec{F}_{jk}' \cdot (\vec{J}_k' - \vec{J}_j')$$

mas, se $\vec{F}_{jk}'$ é na direção dessa "haste" ⟹ o produto vetorial é proporcional à componente da velocidade relativa nessa direção.

mas, se a haste é rígida, ela não deforma, portanto

$$\vec{F}_{jk}' \cdot (\vec{J}_k' - \vec{J}_j') = 0$$

e $dW_{jk} + dW_{kj} = 0$ p/ qualquer par j, k

ou seja, o trabalho das forças internas é nulo.

Em outras palavras, $U_2^{int} = U_1^{int}$ ⟹ a energia potencial interna é constante.

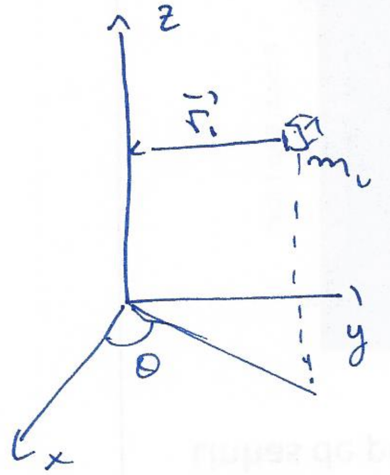
Assim, a energia cinética do corpo rígido muda devido às ações de forças externas

Considerando o corpo rígido, temos dois movimentos possíveis, translação e rotação

Até o momento focamos nossas atenções p/ translação, agora vamos olhar para a rotação.

De forma geral, o movimento de um corpo rígido é composto por uma translação em 3D e uma rotação em torno de um ponto (que pode ser fixo ou estar em movimento)

Vamos analisar o movimento em torno de um eixo ($\hat{z}$)



Neste caso, o movimento da partícula "i" pode ser escrito em termos das coordenadas cilíndricas:

(distância ao eixo z) $\hat{\rho} = \cos\theta_i \hat{x} + \operatorname{sen}\theta_i \hat{y}$

$$\vec{r}_i = r_i \hat{\rho}$$

Como o corpo é rígido, r_i = constante

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = \cancel{\dot{r}_i \hat{\rho}}^{\,0} + r_i \cdot \dot{\hat{\rho}}$$

Mas $\dot{\hat{\rho}} = (-\sin\theta_i \hat{x} + \cos\theta_i \hat{y})\dot{\theta} = \dot{\theta}_i \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_i = r_i \dot{\theta}_i \hat{\theta}$$

Assim, o momento angular p/ uma rotação em torno do eixo $\hat{z}$: $\vec{L}_i = m_i \cdot \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \dot{\theta}_i \hat{z}$

e, para um conjunto de N partículas temos

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i\right) \hat{z}$$

Note que "r_i" é a "<u>DISTÂNCIA AO EIXO Z</u>"

Mas, como o corpo é rígido temos que a velocidade angular de todo pedaço "i" é igual, ou seja: $\dot{\theta}_i = \dot{\theta} + \cancel{\dot{\beta}_i}^{\,0} \Rightarrow \dot{\theta}_i = \dot{\theta}$

e $\vec{L} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \cdot \dot{\theta} \hat{z}$

Chamamos o termo $\sum_i m_i r_i^2 = I_z$ = momento de inércia em relação ao eixo z!

Além disso, sendo corpo rígido, I_z = constante e

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \cdot \dot{\theta} \hat{z}) = I_z \ddot{\theta} \hat{z} = \vec{\tau}_z$$

onde $\vec{\tau}_z$ é o torque na direção $\hat{z}$

No caso mais geral, no qual o corpo rígido rotaciona em torno de um ponto, o momento de inércia deixa de ser um escalar e deve ser tratado como um tensor

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

e $I_{ij} = \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right)$

isso será assunto p/ MecG II. Neste curso vamos apenas considerar o movimento em torno de 1 eixo

Vemos que o movimento de rotação em torno de um eixo é similar ao movimento de translação em 1-D

Movimento em 1-D	Rotação em torno do eixo z
Posição : x	Posição Angular: θ
Velocidade : $\dot{x}$	Velocidade Angular: $\dot{\theta}$
Aceleração : $\ddot{x}$	Aceleração Angular: $\ddot{\theta}$
Força : F	Torque: τ
Massa : m	Momento de inércia: I_z
Momento linear: $p = m\dot{x}$	Momento Angular : $L_z = I_z \dot{\theta}$
2ª Lei de Newton: $F = m\ddot{x} = \frac{dp}{dt}$	2ª Lei de Newton : $\tau = I_z \ddot{\theta} = \frac{dL}{dt}$
Energia cinética $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$	Energia cinética : $T = \frac{I_z \dot{\theta}^2}{2}$

Se o corpo rígido é composto por $N \gg 1$ partículas em uma distribuição contínua de massas podemos definir a <u>densidade de massa</u> considerando um volume dV que satisfaça as seguintes condições

dV é grande o suficiente para que

$$N_{dV} \gg 1$$

dV é pequeno o suficiente p/ que

$\rho(x,y,z) = \frac{dm}{dV}$ seja constante dentro de dV.

Assim, definimos:

$$M = \int_V dm = \iiint_{z\,y\,x} \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

e, se temos uma distribuição superficial de massa (ex: disco, casco esférico ...) temos

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \quad e \quad M = \iint_{y\,x} \sigma(x,y)\, dx\,dy$$

se temos uma distribuição linear de massa (ex: fio fino) definimos:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \Rightarrow M = \int_x \lambda(x) dx$$

Com isso, podemos escrever:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \iiint \rho(x,y,z)\, \vec{r}\, dx\,dy\,dz$$

ou seja:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \iiint \rho(x,y,z)\, x\, dx\,dy\,dz$$

de forma similar, o momento de inércia é escrito:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \iiint \rho(x,y,z)\, r^2 dV = \iiint \rho(x,y,z) \overbrace{(x^2+y^2)}^{\text{(distância ao eixo z)}} dV$$

Alguns teoremas nos ajudam a encontrar o C.M. e o I_z de forma mais simples:

p/ o C.M.

1) Se um corpo for simétrico em relação a um plano, o seu C.M. estará neste plano

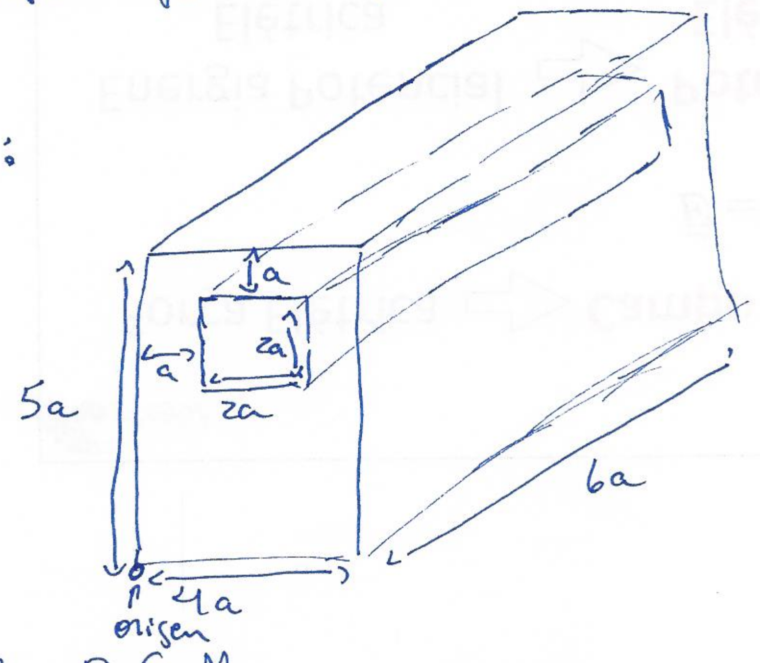
2) Se um corpo é simétrico em relação a dois planos, o seu C.M. estará na linha de interseção desses planos

3) Se um corpo é simétrico em relação a 3 planos, o seu C.M. estará no ponto comum de intersecção desses 3 planos, se houver.

4) Se um corpo é simétrico com relação a um eixo, seu C.M. estará neste eixo.

5) Se um corpo é composto por N corpos com C.M. conhecido, o C.M. do corpo pode ser calculado como se os N corpos fossem partículas localizadas em seus C.M.

Exemplo:



densidade $\rho = \text{const.}$

Calcular o C.M.

Vamos considerar dois corpos.

O primeiro tem volume $4a \times 5a \times 6a$ e densidade ρ

$$\Rightarrow M_1 = 120a^3 \cdot \rho$$

buraco

O segundo tem volume $2a \times 2a \times 6a$ e densidade $(-\rho)$

$$M_2 = -24a^3\rho$$

O C.M.$_1$ é: como ele é simétrico aos planos que passam em

$z = 2{,}5a$ (x, y)

$x = 3a$ (y, z) $\Rightarrow CM_1 = (3a, 2a, 2{,}5a)$

$y = 2a$ (x, z)

O CM_2 é: como ele é simétrico aos planos que passam por:

$z = 3a$ (x, y)

$x = 3a$ (y, z)

$y = 2a$ (x, z)

$$\therefore CM = \frac{1}{M} \cdot \left[CM_1 \cdot M_1 + CM_2 \cdot M_2 \right]$$

ou seja $M = (120 - 24)\, a^3 \rho = 96 a^3 \rho$

$$x_{cm} = \frac{1}{\cancel{96 a^3 \rho}} \cdot 3a \cdot \cancel{96 a^3 \rho} = 3a$$

$$y_{cm} = \frac{1}{\cancel{96 a^3 \rho}} \cdot 2a \, \cancel{96 a^3 \rho} = 2a$$

$$z_{cm} = \frac{1}{96 \cancel{a^3} \rho} \cdot \left[120 \cancel{a^3 \rho} \cdot 2{,}5a - 24 \cancel{a^3 \rho} \cdot 3a \right]$$

$\boxed{z_{cm} = 2{,}375\, a}$ Note que z_{cm} desce pois o buraco não tem massa.

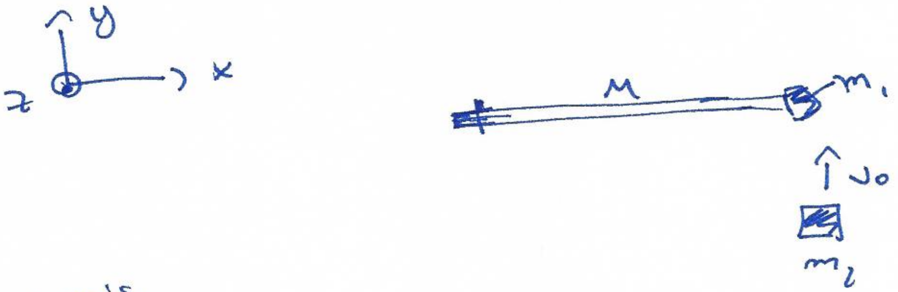
Exemplo de Rotação:

Uma haste l com massa M uniformemente distribuída tem um pequeno bloco m_1 em uma das pontas m_2 com velocidade inicial $V_0 \hat{j}$ colide com m_1 ficando presa a ela! A outra ponta da haste é presa.

Calcule: a) I_z do sistema após o choque

b) ω adquirido após o choque

c) energia dissipada na colisão.



∴ logo depois da colisão temos.

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 l^2 + m_2 l^2 + \int_0^l \lambda x^2 \, dx$$

onde $\lambda = \frac{M}{l}$ = densidade linear de massa.

$$\therefore \quad I_z = (m_1 + m_2) l_2 + \frac{\lambda . l^3}{3} = \boxed{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right) l^2}$$

b) por conservação de $\vec{L}_z$ temos:

$$\vec{L}_z = m_2 . (\vec{l} \times \vec{v}_0) = m_2 \, l . v_0 \, \hat{z} \qquad \text{(antes)}$$

$$\vec{L}_z = I_z . \omega \hat{z} = l^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right) \omega \hat{z} \qquad \text{(depois)}$$

Assim: $\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right) l^{\cancel{2}} \omega = m_2 \cancel{l} \, v_0 \quad \therefore$

$$\omega = \frac{m_2 v_0}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right) l}$$

c) Antes da colisão:

$$E_1 = \frac{m_2 V_0^2}{2}$$

Após a colisão: $E_2 = \frac{I_z \omega^2}{2}$

$$E_2 = \cancel{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)} \cancel{\ell^2} \cdot \frac{m_2^2 \cdot V_0^2}{2 \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{3}\right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{\ell^2}}$$

$$E_2 = \frac{m_2}{2} V_0^2 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{3}} \right)$$

$$\therefore \quad E_1 - E_2 = \frac{m_2 V_0^2}{2} \cdot \left(\frac{m_1 + \cancel{m_2} + \frac{M}{3} - \cancel{m_2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{3}} \right)$$

$$\therefore \quad \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{m_1 + \frac{M}{3}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{3}}$$