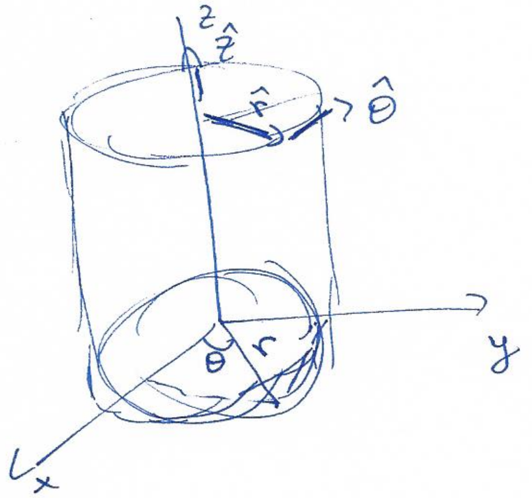
Coordenadas Esféricas e Cilíndricas

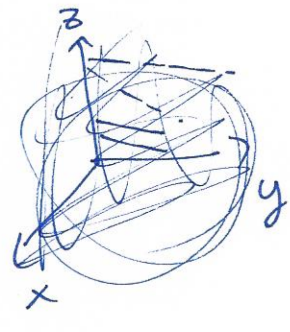
Muitos dos problemas que estudamos apresentam simetrias esféricas ou cilíndricas.

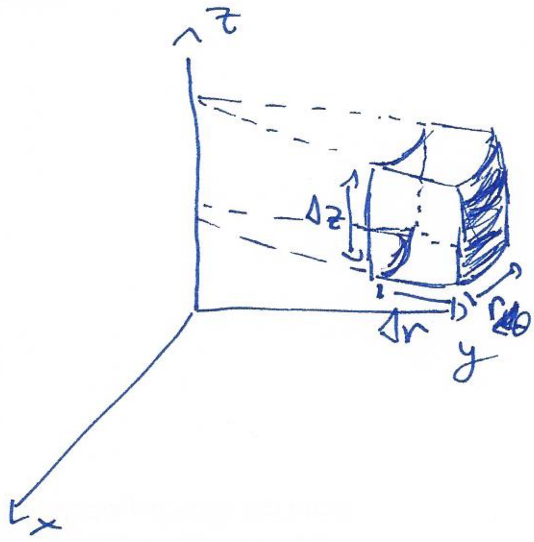
Usando o sistema de coordenadas esféricas ou cilíndricas facilita o entendimento ~~do~~ e resolução desses problemas.

Vamos ver a questão das coordenadas cilíndricas



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = z$$



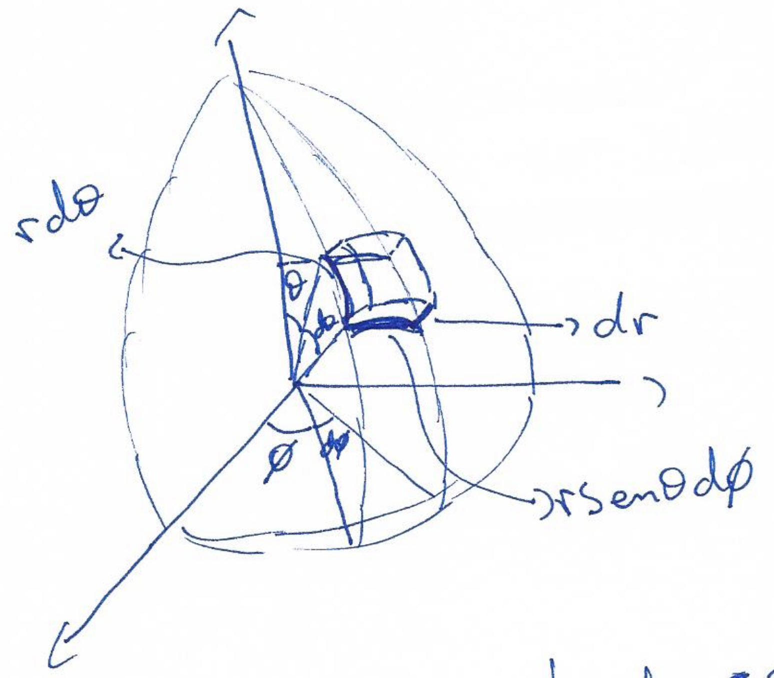


∴ O elemento de área é

$$dA = r \cdot d\theta \cdot dz$$

$$dV = r\, dz\, d\theta\, dr = dA \cdot dr$$

No caso de coordenadas esféricas



$x = r\,\mathrm{sen}\theta \cos\phi$

$y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi$

$z = r \cos\theta$

Assim, o elemento de área é:

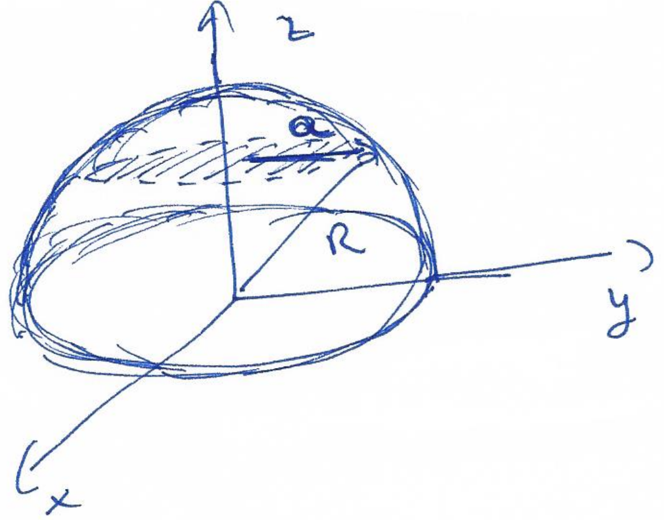
$$dA = r\,\mathrm{sen}\theta\, d\phi . r d\theta = r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\phi\, d\theta$$

Elemento de volume:

$$\boxed{dV = dA . dr = r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\phi\, d\theta\, dr}$$

Para entender a importância desses 2 sistemas de coordenadas, vamos usá-los para alguns exemplos

1) calcular o C.M. de um hemisfério homogêneo de raio $\underline{R}$.



PARA SOLUCIONAR este problema, é mais fácil escrever o problema em coordenadas CILÍNDRICOS

Por simetria, sabemos que o C.M. está no eixo z $\therefore$ $X_{cm} = 0$

$Y_{cm} = 0$

$$Z_{cm} = \frac{1}{M} \iiint \rho(x,y,z)\, z\, dV$$

Agora, $\rho(x,y,z) = \begin{cases} \rho & \text{se } \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ z>0 \end{cases} \\ 0 & \text{se } x^2+y^2+z^2 > R^2 \text{ ou } z<0 \end{cases}$

$$\therefore Z_{cm} = \frac{1}{M} \cdot \iiint \rho \cdot z \cdot r\,dr\,d\theta \cdot dz$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^R \underbrace{\int_0^a \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta}_{\text{área de um disco de raio } a} \rho\, z\, dz$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \cdot \rho \cdot \int_0^R \pi \cdot a^2 z \, dz$$

Agora, $a^2 + z^2 = R^2 \therefore a^2 = R^2 - z^2$

$$\therefore z_{cm} = \frac{\pi \rho}{M} \cdot \int_0^R zR^2 - z^3 \, dz = \frac{\pi \rho}{M} \cdot \left(\frac{z^2 R^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$= \frac{\pi \rho}{M} \cdot \frac{R^4}{4}$$

mas $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{2 \cancel{4} \pi R^3}{3 \cancel{6}}}$

$$z_{cm} = \frac{\cancel{\pi} \cancel{\rho} \cdot \frac{R^{\cancel{4}}}{\cancel{4} 2}}{\cancel{\rho} \cdot \frac{2 \cancel{\pi} \cancel{R^3}}{3}} = \boxed{\frac{3R}{8}}$$

---

2) e o momento de inércia em torno do eixo $\hat{z}$:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

Vamos fazer por partes, primeiro achamos de um anel de raio "r" daí, usamos vários aneis para calcular o de um disco de raio "r" e então somamos os discos para obter o semi ~~círculo~~ esfera.

*) para o anel temos:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \int_0^{2\pi} \lambda \cdot r^2 \cdot r \, d\theta$$

onde $\lambda = \dfrac{m_a}{2\pi r} \Rightarrow I_{z\,anel} = \dfrac{m_a}{2\pi \cancel{r}} \cdot r^{\cancel{3}\,2} \cdot 2\cancel{\pi}$

$$I_{z\,anel} = m_a \cdot r^2$$

p/ o disco de massa M_d e raio R temos

$$I_{z\,disco} = \sum_{aneis_i} \underbrace{m_i}_{\text{massa do anel de raio } r_i} r_i^2$$

Como a massa é constante, $\sigma = \dfrac{M_d}{Area} = \dfrac{M_d}{\pi R^2}$

$$\Rightarrow I_{z\,disco} = \int_0^R \sigma\, 2\pi r\, r^2\, dr$$

a massa de um anel de raio r, em termos de M_d é

$dm = \sigma \cdot 2\pi r\, dr$

$$= \frac{M_d}{\pi R^2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M_d}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$\therefore \boxed{I_{z\,disco} = \frac{M_d R^2}{2}}$$

Por fim, p/ o hemisfério de raio R temos

$$I_{z\,Hem} = \sum_{i_{disco}} m_i \frac{a_i^2}{2}$$

↳ agora, cada disco tem raio

$$\boxed{a^2 = R^2 - z^2}$$

e cada disco tem massa: $\rho = \frac{M}{} \frac{3}{2\pi R^3}$ (105)

$$dM = \rho \cdot \pi a^2 \cdot dz = \frac{3M}{2\cancel{\pi} R^3} \cancel{\pi} a^2 dz$$

$$\therefore I_{z_{hem}} = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{3M}{2R^3} \cdot (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{\cancel{4}R^3} \cdot \int_0^R R^4 - 2R^2z^2 + z^4 \, dz$$

$$= \frac{3M}{\cancel{4}R^3} \cdot \left(R^5 - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5} \right) = \frac{\cancel{3}M}{\cancel{4}\cancel{R^3}} \cdot \frac{\cancel{8}R^{\cancel{5}}}{\cancel{15}\,5} = \frac{\cancel{2}}{5} M R^2$$

Note agora que se a massa M está distribuída numa esfera inteira e NÃO em um hemisfério

Qual seria $I_{z\,esfera}$?

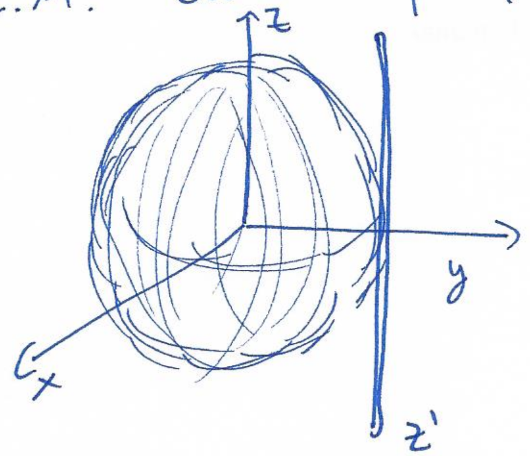
Se M é a massa da esfera ⇒ cada hemisfério tem $M/2$ ∴

$$\left.\begin{aligned} I_{z_{hem_+}} &= \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 \\ I_{z_{hem_-}} &= \frac{2}{5}\frac{M}{2}R^2 \end{aligned}\right\} I_{z\,esf} = I_{z_{hem_+}} + I_{z_{hem_-}}$$

$$\therefore \boxed{I_{z\,esfera} = \frac{2}{5} M R^2}$$

é o mesmo pois, em termos de rotação em $\hat{z}$ a distribuição das massas ~~~~ é similar p/ a esfera e p/ o hemisfério.

E se eu quiser calcular o momento de inércia em torno de um eixo fora do C.M. da esfera, por exemplo:

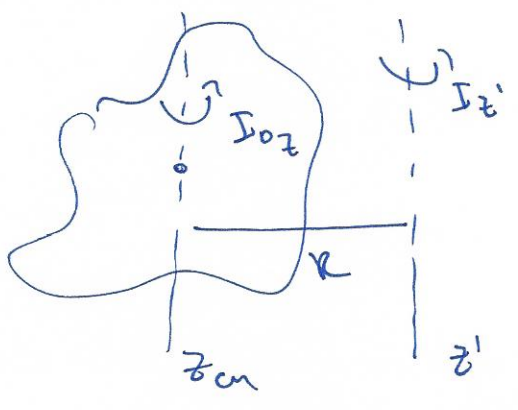


ou, no caso do disco, qual o I_x ou I_y?

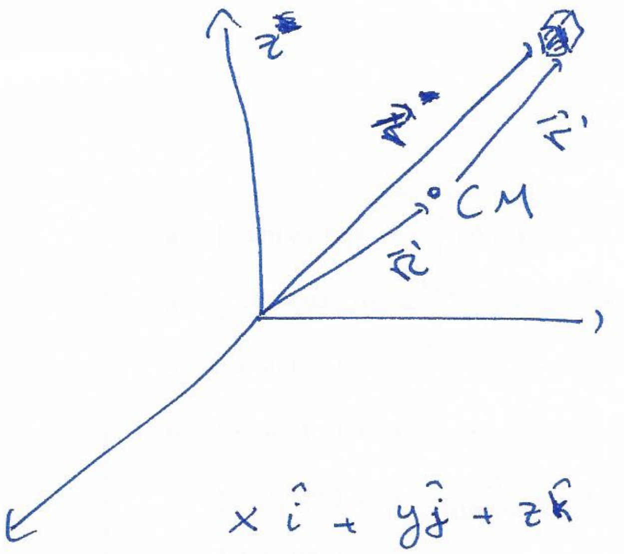
Para o 1º caso temos a ajuda do teorema dos eixos paralelos:

Seja I_{0_z} o momento de inércia em torno do eixo z que passa pelo C.M., o momento de inércia em torno de um eixo z' qualquer é igual a soma de I_{0_z} e o momento de inércia em torno de z' como se toda a massa M estivesse no C.M.

ou seja:



$$\boxed{I_{z'} = I_{0_z} + MR^2}$$



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x' + X)\hat{i} + (y + Y)\hat{j} + (z + Z)\hat{k}$$

$$x = x' + X$$
$$y = y' + Y$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = (x' + X)^2 + (y' + Y)^2 \ldots$$

$$I_{z^*} = \int_V (x^2 + y^2)\,\rho\, dV = \overbrace{\int_V (x'^2 + y'^2)\,\rho\, dV}^{I_{z_{cm}}} +$$

$$\int_V \underbrace{(X^2 + Y^2)}_{\text{constante}}\,\rho\, dV + 2\cancel{X} \underbrace{\int_V x'\rho\, dV}_{M x'_{cm} = 0} + 2Y \underbrace{\int_V y'\rho\, dV}_{M y'_{cm} = 0}$$

$$\Downarrow \int_V \rho\, dV = M$$

$$I_z = I_{z_{cm}} + (X^2 + \cancel{Y}^2) \cdot M + 0 + 0 \quad \therefore$$

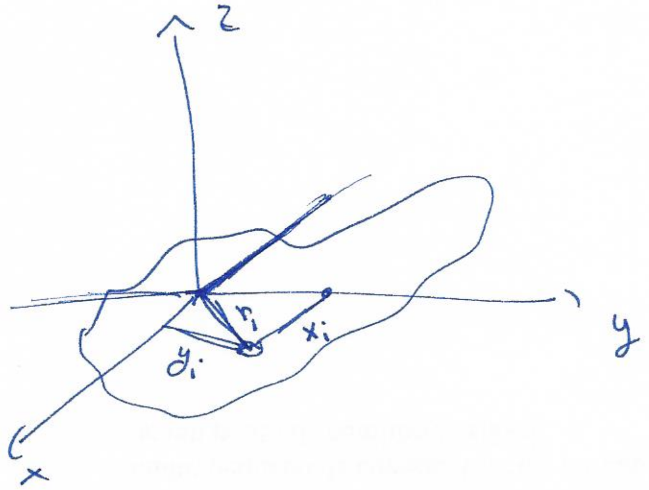
$$\boxed{I_z = I_{z_{cm}} + R^2 M}$$

Já, para os eixos perpendiculares temos:

"A soma dos momentos de inércia de uma lâmina plana em relação a dois eixos perpendiculares, no plano da lâmina, é igual ao momento de inércia em relação a um eixo que passa pela intersecção e é perpendicular à lâmina"

Ou seja, se uma lâmina está no plano xy temos que:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



A distância ao eixo x é y_i e ao eixo y é x_i ∴

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

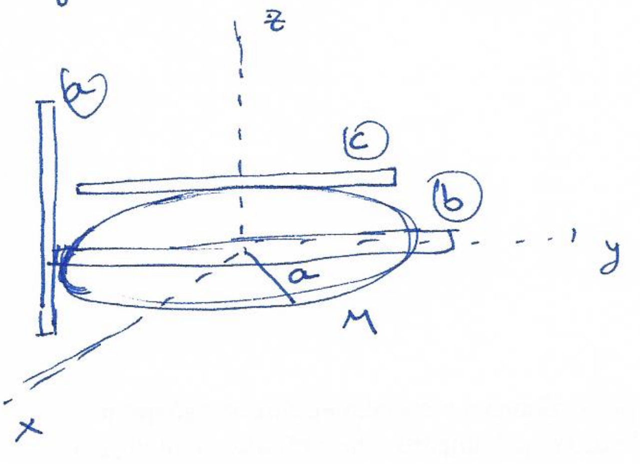
$$\therefore \quad I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x$$

Ex: Calcular o momento de inércia de 1 anel fino em relação

a) a um eixo que passa pela borda do anel e seja $\perp$ ao anel

b) a um eixo que passa pelo centro do anel e esteja em seu plano

c) a um eixo que passa pela borda do anel e esteja no seu plano.



Seja $\boxed{\lambda = \dfrac{M}{2\pi a}}$

1º vamos calcular $I_{z_{cm}}$:

$$I_{z_{cm}} = \int_0^{2\pi} \lambda \, a \, a^2 \, d\theta = 2\pi \lambda a^3 = \boxed{Ma^2}$$

pelo teorema dos eixos paralelos, em (a) temos

$$I_a = Ma^2 + M.\underbrace{r^2}_{r=a} \Rightarrow \boxed{I_a = 2Ma^2}$$

P/ calcular em b usamos o teorema dos eixos perpendiculares e temos

$$I_y + I_x = Ma^2$$

Por simetria, $I_x = I_y$ $\therefore$ $2I_y = Ma^2 \Rightarrow \boxed{I_y = \frac{Ma^2}{2}}$

Usando novamente os eixos paralelos podemos achar

$$I_c = I_y + Mr^2 \quad \text{onde} \quad r = a \Rightarrow$$

$$I_c = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \boxed{\frac{3}{2}Ma^2}$$