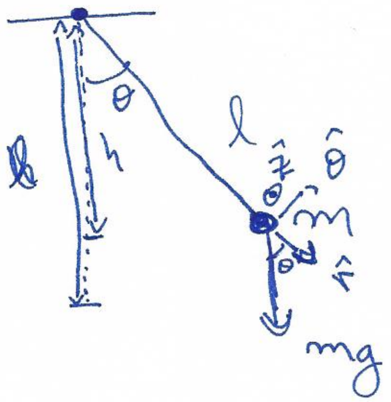
Pêndulo Simples



$$\vec{F} = mg\cos\theta\,\hat{r} - mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{r} = l\,\hat{r}$$

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = mgl \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -\text{sen}\,\theta\,\hat{z} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = -mgl\,\text{sen}\,\theta\,\hat{z}}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_z = ml^2\dot{\theta}\,\hat{z} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_z}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\,\hat{z} = -mgl\,\text{sen}\,\theta\,\hat{z}$$

$$\therefore l\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0}$$

p/ $\theta \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen}\,\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad \text{e} \quad \theta = \theta_0\cos(\omega t + \beta)$$

Como o sistema é conservativo temos que

$$E = T + U = \text{constante}$$

e $U(\theta) - U(\theta_0) = -\int_{\theta_0}^{\theta} N(\theta)\, d\theta$

Chamando $U(0) = 0$ temos

$$U(\theta) = -\int_0^{\theta} -mgl \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -mgl\cos\theta \Big|_0^{\theta} =$$

$$U(\theta) = mgl(1-\cos\theta)$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + (1-\cos\theta) mgl}$$

Chamando o ponto mais alto de θ_0

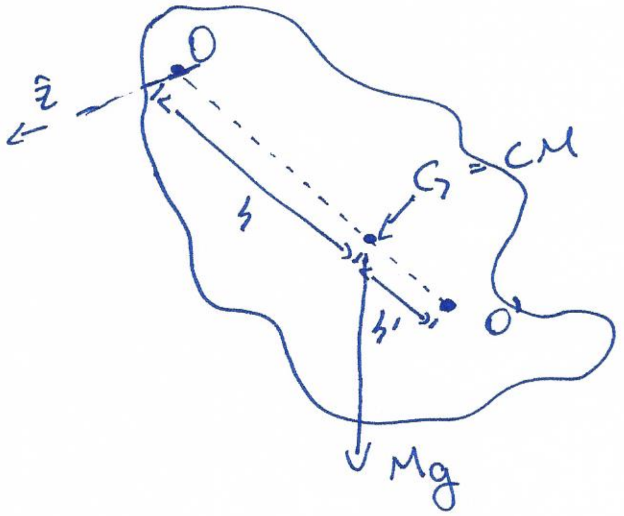
$$E = mgl(1-\cos\theta_0)$$

Lembrando $\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$

$$\left[\begin{array}{l} E = 2mgl \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \\ U = 2mgl \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array}\right.$$

Pêndulo Composto

Agora, se o pêndulo ~~ss~~ é um corpo rígido suspenso por um ponto e livre para "balançar"



O momento angular do corpo rígido girando em torno de um eixo que passa pelo ponto O é dado por

$$L_z = I_z \dot{\theta} \quad \text{e} \quad I_z = \int_V (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$I_z = M . k_o^2$

↳ onde k_o é uma distância que chamamos de "braço de giro".

$$\therefore \frac{dL_z}{dt} = M k_o^2 \ddot{\theta} = \tau_{peso}$$

Agora, a força peso atua em cada "pedaço" do corpo, para o pedaço "i"

$$F_i = m_i g$$

de forma que, em "i" temos

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$

$$\vec{\tau} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M.\vec{R} \times \vec{g}$$ ou seja,

$$\vec{\tau} = -M h g \,.\, \text{sen}\theta \, \hat{z}$$

$$\cancel{M} k_0^2 \ddot{\theta} = -\cancel{M} h g \,\text{sen}\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{h}{k_0^2} g \,\text{sen}\theta$$

Chamando $l = \frac{k_0^2}{h} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta$

ou seja, esta posição l, na mesma linha de $\overline{OG}$ oscila como um ~~oscilad~~ pêndulo simples

o ponto O', que está distante "l" de O na linha $\overline{OG}$ é chamado de "Centro de Oscilação"

Sendo h' a distância $\overline{GO'}$ temos

$$l = h + h' \Rightarrow \frac{k_0^2}{h} = h + h'$$

$$k_0^2 = h^2 + hh'$$

Pelo teorema dos eixos paralelos

$$\underbrace{Mk_0^2}_{I_0} = \underbrace{Mk_G^2}_{I_{CM}} + Mh^2$$

ou ainda

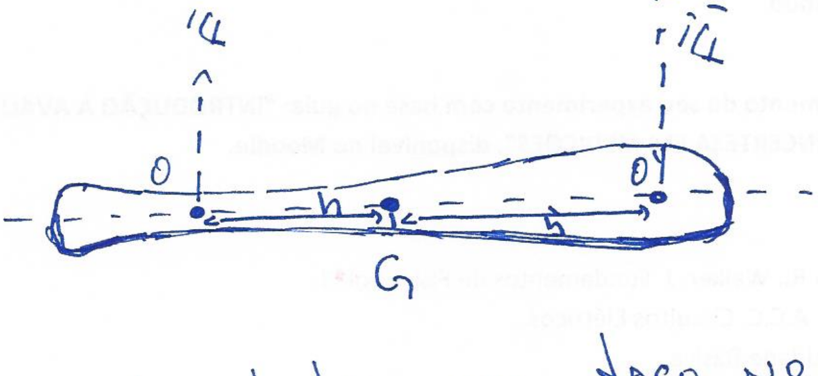
$$k_0^2 = k_G^2 + h^2 = h^2 + hh'$$

$\therefore\ k_G^2 = hh'$

Ou seja, se agora pendurarmos o corpo rígido pelo ponto O', o centro de oscilação será O

Exemplo:

Encontrar o centro de percussão de um taco de baseball: o ponto no qual a bola deve bater p/ evitar que a sensação da batida não seja sentida.



Quando a bola bate no taco, no ponto O', uma força F' age no taco por um tempo Δt

A posição O é segura pelo rebatedor, assim a força que o rebatedor faz em O é F

desta forma, as forças atuam pa um tempo curto e o impulso causado é

$$J = \int F\,dt \quad e \quad J' = \int F'\,dt$$

Agora, pelo teorema do momento linear, na hora do choque

$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}(\overbrace{Mh\dot{\theta}}^{Mv})}_{\text{movimento do centro de massa}} = F + F'$$

e $$Mh\dot{\theta} = \int F + F'\,dt = J + J'$$

Já, pelo momento angular

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Mk_0^2\dot{\theta}\right) = \overbrace{F'.l}^{\tau'} + \overbrace{F.0}^{\tau}$$

Como o ponto de apoio é onde o rebatedor está segurando, o braço de seu torque é nulo

$$\therefore \quad Mk_0^2\dot{\theta} = J'l \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{J'l}{Mk_0^2}$$

Assim, $\frac{\cancel{M} h \, \mathcal{J}' l}{\cancel{M} k_0^2} = \mathcal{J} + \mathcal{J}'$

$$h l \mathcal{J}' = k_0^2 \mathcal{J} + k_0^2 \mathcal{J}'$$

$$\Downarrow$$

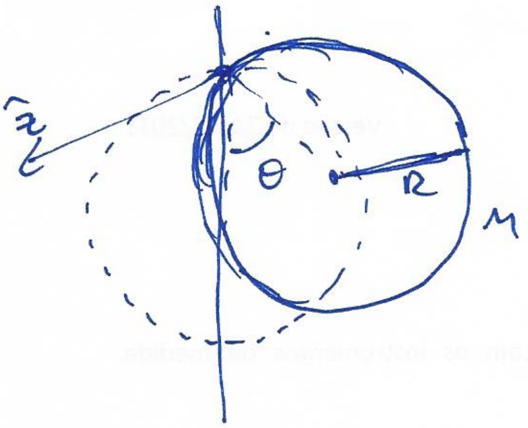
$$h l = k_0^2 \left(1 + \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}'} \right)$$

Se quisermos que não haja força na posição do mão temos que $\mathcal{J} = 0 \Rightarrow \boxed{h l = k_0^2}$

onde $l = h + h' \Rightarrow h^2 + h h' = k_0^2$

$$\boxed{h' = \frac{k_0^2 - h^2}{h}}$$

<u>Exemplo 2</u>: Um pêndulo ~~c~~ composto, formado por um anel homogêneo de raio R e massa m, está suspenso em um campo gravitacional uniforme, como mostrado na figura, de forma que possa girar em torno de uma haste perpendicular ao anel (eixo $\hat{z}$) que passa pela ~~e~~ borda do anel. Calcular o período de pequenas oscilações.



$$Mk_0^2\ddot{\theta} = -MgR\,\text{sen}\,\theta$$

Se $\theta \ll 1$ $\quad \text{sen}\,\theta \sim \theta$

$$\therefore\ Mk_0^2\ddot{\theta} = -MgR\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{gR}{k_0^2}\theta = 0$$

PARA calcular k_0 tomamos o teorema dos eixos paralelos

$$Mk_0^2 = MR^2 + M\overset{R^2}{h^2} = 2MR^2$$

$$k_0 = \sqrt{2}R \quad \therefore \quad \ddot{\theta} + \frac{g \cdot R}{2R^2}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$$