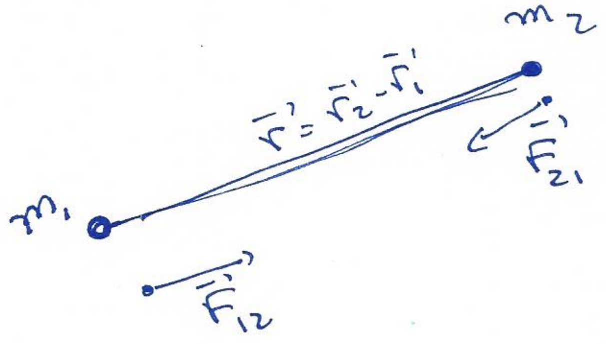
Gravitação

Toda massa no universo atrai as "outras massas" do universo com uma força que varia diretamente com o produto das duas massas e inversamente ao quadrado da distância entre elas.



Pela terceira lei de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

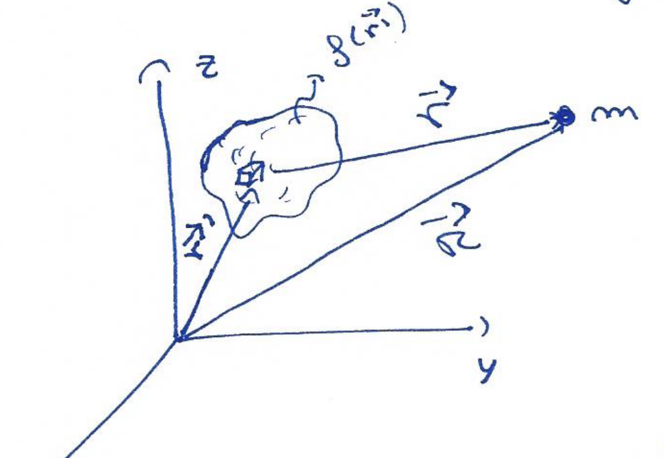
No caso de termos 2 massas puntiformes a força de atração gravitacional torna-se

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}}$$

Note que G é uma constante positiva. (vamos discutir G em breve).

No caso geral, as massas não podem ser consideradas como ~~sendo~~ puntiformes, mas sim como uma distribuição de massas. ~~que~~ Nesse caso, considerando que "$\underline{m}$" seja uma massa cujas dimensões permitem que ela seja tratada como puntiforme, a força de atração gravitacional que ela sente devido a um outro corpo massivo é:

$$\vec{F} = -Gm. \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r^2} dV' \hat{r}$$



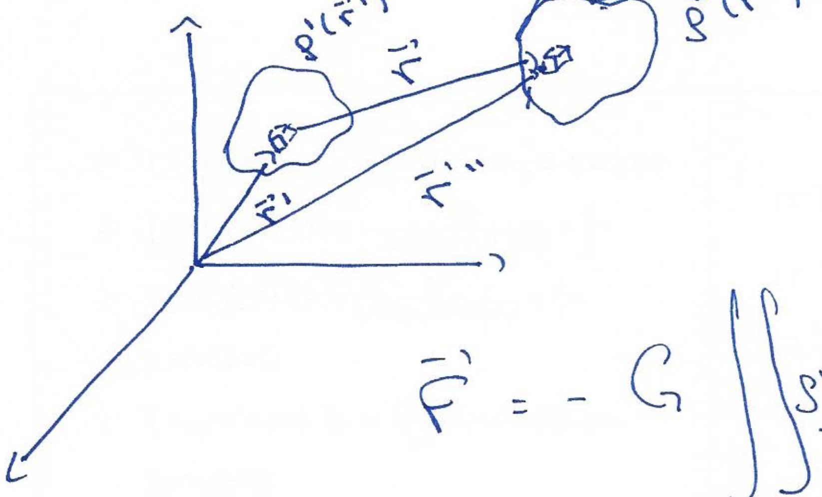
Note que a integral é dada em $\vec{r}\,'$ que é a coordenada de ~~corpo massivo~~ cada "pedacinho" do corpo massivo, cuja densidade é $\rho(\vec{r}\,')$

todavia, para cada posição $\vec{r}\,'$ a direção da força gravitacional é definida por $\hat{r}$, que depende de $\vec{r}\,'$:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}\,'}$$

isso indica que, de forma geral, o cálculo da força gravitacional pode ser bastante complexo.

No caso dos 2 massas NÃO serem puntiformes, a equação fica ainda mais complicada:



$$\vec{F}' = -G \int_{V''}\int_{V'} \frac{\rho''(\vec{r}'') \cdot \rho'(\vec{r}')}{r^2}\, dV' dV''\, \hat{r}$$

Note que $\boxed{\vec{r} = \vec{r}'' - \vec{r}'}$

Uma forma de tentar simplificar o problema é considerar o vetor campo gravitacional

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')\, \hat{r}}{r^2}\, dV'$$

Neste caso, o vetor campo gravitacional é calculado em um ponto qualquer $\vec{R}$ tal que

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}'$$

Além disso, como a força gravitacional é uma força conservativa, podemos definir uma energia potencial gravitacional como:

$$U(\vec{R}) \Rightarrow \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

definimos também o potencial gravitacional Φ tal que,

$$\vec{g} \equiv -\vec{\nabla}\Phi$$

Como $\vec{g}$, como foi mostrado, é $\vec{g} = g\hat{r}$, temos que o gradiente:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \equiv -g\hat{r}$$

portanto, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \equiv 0$ e $\Phi = \Phi(r)$

ou seja, Φ depende apenas do módulo do vetor $\vec{r}$

Como, para uma partícula puntiforme de massa M temos:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r},$$

o potencial torna-se

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

Agora, para uma distribuição não puntiforme de massa, o potencial torna-se:

1) distribuição volumétrica

$$\Phi = -G \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r}\, dv' .$$

2) distribuição superficial

$$\Phi = -G \int_{A'} \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{r}\, dA'$$

3) distribuição linear

$$\Phi = -G \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}\,')}{r}\, dl'$$

O trabalho feito por um agente externo para mover uma massa "$\underline{m}$" por um caminho $d\vec{r}$ em um campo gravitacional $\vec{g}$ é dado por:

$$dW = \underbrace{-m\vec{g}\cdot d\vec{r}}_{\text{trabalho do campo}}$$

$$dW = m\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = m\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = m\, d\Phi$$

$$\Rightarrow \quad W_{1\to 2} = m\left(\Phi(r_2) - \Phi(r_1)\right)$$

e $\Phi(r)$ depende só da posição, não do caminho e afastar a massa m de uma massa M requer que trabalho seja feito na massa m.

Como $\Phi(r)$ depende da distância em M e m podemos definir $\Phi(r \to \infty) = 0$, ou seja, o potencial gravitacional é nulo no infinito.

Consequentemente, $\Phi(r)$ é o trabalho necessário, por unidade de massa, para trazer o corpo do infinito para o ponto $\vec{r}$ em questão.

Dessa forma, a energia potencial é definida como:

$$U = m\Phi \Rightarrow \vec{\nabla} U = \vec{F}$$

Note que a constante de proporcionalidade G ainda não foi definida. ~~Note~~ ~~esse~~,

Essa é a constante Física "mais velha", sendo determinada em 1798 por Henry Cavendish.

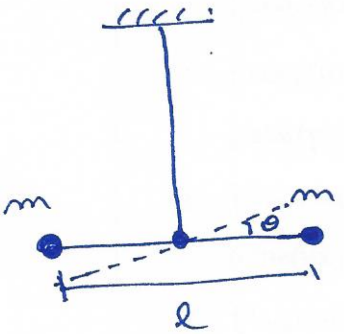
Atualmente, seu valor é conhecido com boa precisão:

$$G = 6{,}673 \times 10^{-11} \, N \, m^2/kg^2$$

O metodo de Cavendish consiste em medir oscilações em um pêndulo de torção.

O probrema envolve oscilações, rotações e gravitação!

Primeiramente, monta-se um pêndulo de torção como o mostrado abaixo:



Se torcemos o pêndulo por um ângulo θ, o torque restaurador será:

$$\tau = -K\theta.$$

Agora, o momento de inercia do problema é:

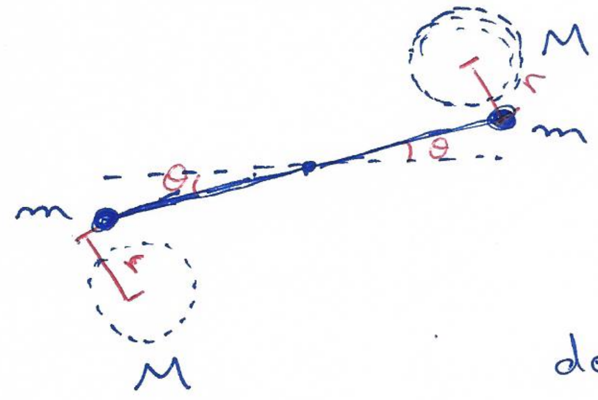
$$I = m\frac{l^2}{4} + m\frac{l^2}{4} = m\frac{l^2}{2}$$

$$\vec{L}_z = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}\,\hat{z} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \frac{ml^2}{2}\ddot{\theta} = -K\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2K}{ml^2}.\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{2\pi l\sqrt{\frac{m}{2K}}}$$

Se duas massas "M" são colocadas próximas do m para que exista atração gravitacional, temos:



Como são duas interações do tipo Mm (Note que $l >> r$ tal que interações mm e MM podem ser desprezadas)

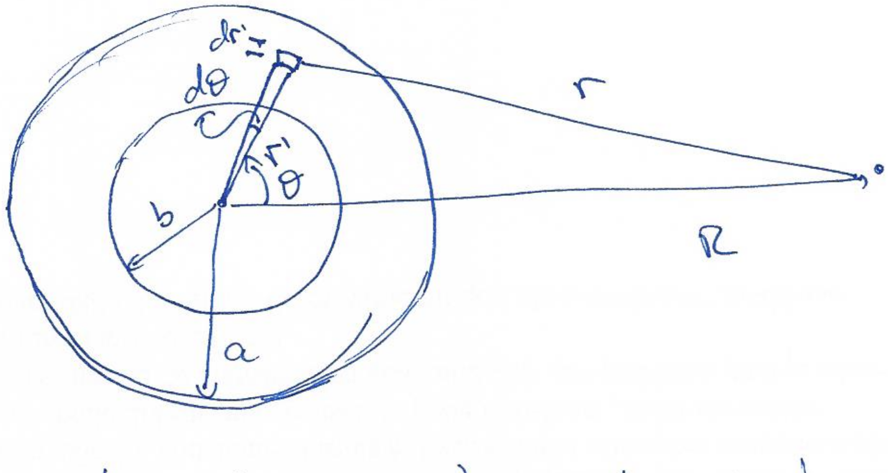
Neste caso, quando há equilíbrio, temos:

$$K\theta_{eq} = 2 \cdot \underbrace{\frac{GMm}{r_{eq}^2}}_{\text{Força em cada massa "m"}} \times \overbrace{\frac{l}{2}}^{\text{Braço do torque}}$$

$$\therefore \quad K\theta_{eq} = GMm\frac{l}{r_{eq}^2} \Rightarrow G = \frac{K \cdot \theta_{eq} \cdot r_{eq}^2}{Mml}$$

e K pode ser determinado a partir do período de oscilação.

Exemplo



Calcular o potencial gravitacional dentro e fora do casco:

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(r')}{r} dV'$$

devido à simetria em torno do eixo $\underline{R}$, ele NÃO depende do ângulo azimutal ϕ, assim, $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$.

$$\Rightarrow \quad \Phi = -2\pi \rho G. \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} d\theta$$

Aqui assumimos ρ = constante dentro do casco.

Para um ponto P fora do casco temos

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}' \quad \therefore$$

$$r^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\theta$$

Sendo R = constante, temos, para um dado $\overset{\text{tratado como constante:}}{\widetilde{r'}} \Rightarrow$

$$2r dr = 2Rr' \operatorname{sen}\theta d\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Phi = -2\pi\rho G. \int_b^a r'^2 dr'. \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} d\theta = -\frac{2\pi\rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' \int_{R-r'}^{R+r'} \frac{dr}{r'}$$

mas: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta d\theta}{r} = \dfrac{dr}{Rr'}$

$$\Rightarrow \Phi = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a \cdot r'^2 dr' \cdot \frac{1}{r'} \cdot (\cancel{R} + r' - \cancel{R} + r') =$$

$$= -\frac{2\pi \rho G}{R} \cdot \int_b^a 2 r'^2 dr' = -\overbrace{\frac{4\pi}{3} \rho (a^3 - b^3)}^{M} \frac{G}{R} = -\frac{MG}{R}$$

Agora, se $\underline{R < b}$ temos:

$$\Phi = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a r'^2 dr' \int_{r'-R}^{r'+R} \frac{dr}{r'} = -\frac{2\pi \rho G}{R} \int_b^a 2R r' dr$$

$= -2\pi \rho G (a^2 - b^2) \Rightarrow$ note que o potencial independe de R!

Se $\underline{b < R < a}$ temos:

$$\Phi = -\frac{2\pi G}{R} \cdot \left[\int_b^R r'^2 dr' \cdot \int_{R-r'}^{R+r'} \frac{dr}{r'} + \int_R^a r'^2 dr' \int_{r'-R}^{r'+R} \frac{dr}{r'} \right] =$$

$$= -\frac{2\pi G}{R} \cdot \left[\int_b^R 2r'^2 dr' + \int_R^a 2R r' dr' \right] =$$

$$= -\frac{2\pi G}{R} \cdot \left[\frac{2}{3} R^3 - \frac{2}{3} b^3 + \cancel{2} R a^2 - R^3 \right] = \boxed{-4\pi G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{R^2}{6} - \frac{b^3}{3R} \right)}$$