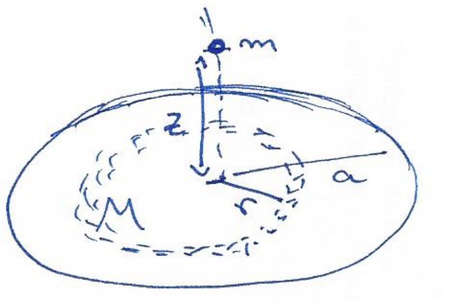
Exemplo 2: Calcular a força sobre uma massa puntiforme $\underline{\underline{m}}$ localizada sobre o eixo de um disco de raio $\underline{\underline{a}}$, massa $\underline{\underline{M}}$



A estratégia é pensar o problema em coordenadas cilíndricas e calcular o potencial gravitacional em m devido a um anel de raio r.

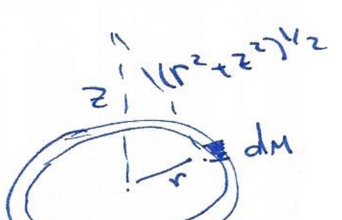
Se o disco tem massa M e raio a, temos

$$\sigma = \frac{M}{\pi a^2}$$

um ~~disco~~ anel de raio $r \to r+dr$ tem massa:

$$\text{anel:}\ M_{anel} = \sigma . 2\pi r dr =$$

por simetria, o potencial de cada pedacinho do anel:



$$\Rightarrow d\Phi = -\frac{G.dM}{\sqrt{r^2+z^2}} \therefore$$

$$\Phi = -G \int_A \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = -G \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sigma r dr d\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = -2\pi\sigma G \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\frac{r}{z} = \cosh\beta \Rightarrow$$

$$dr = \operatorname{senh}\beta . z d\beta$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{r}{z}\right)^2} = \operatorname{senh}\beta$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{-2\pi\sigma G . z^2}{z} \int_{\beta_0}^{\beta_a} \cosh\beta \, d\beta$$

$$= -2\pi\sigma G \cdot z \cdot \operatorname{Senh}\beta \Big|_{\beta_0}^{\beta_a} = -2\pi\sigma G \cdot z \cdot \left[\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2} - 1\right]$$ 1130

$$= -2\pi\sigma G\left[\sqrt{z^2+a^2} - z\right]$$

Sendo $\vec{F} = F\,\hat{z} \Rightarrow F = -m\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = +2\pi\sigma G m\left[\dfrac{2z}{\sqrt{z^2+a^2}}\cdot\dfrac{1}{2} - 1\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2 \cancel{M} G_m}{a^2}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1\right]\hat{z}}$$

Note que $\vec{F}$ aponta para $\boxed{-\hat{z}}$.

Note que se $z \gg a$ temos

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \cong \frac{1}{z}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx \frac{2MmG}{a^2}\cdot\left[\frac{1}{z}\cdot\left(\cancel{z} - z\frac{a^2}{z^2}\right) - 1\right]\hat{z}$$

$$= \frac{2GMm}{a^2}\cdot\left(-\frac{a^2}{2z^2}\right)\hat{z} = -\frac{GMm}{z^2}\hat{z}$$

Equação de Poisson.

Vamos assumir ~~que~~ uma massa m puntiforme!

Traçando uma superfície fechada, $\underline{S}$, qualquer, que engloba a massa $\underline{m}$, podemos definir o fluxo gravitacional que passa por S, emanando da massa $\underline{m}$ como:

$$\Phi_m = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, dA$$

todavia, dado que $\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$, temos:

$$\hat{n} \cdot \vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \cdot \cos\theta$$

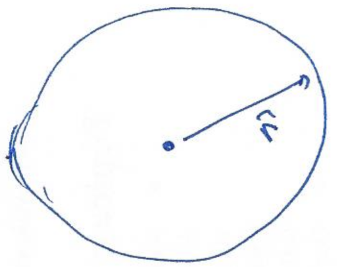
onde θ é o ângulo entre $\hat{n}$ e $\hat{r}$ em um dado dA.

Assim, o fluxo torna-se

$$\Phi_m = -Gm \underbrace{\int_S \frac{\cos\theta}{r^2}\, dA}_{\text{definição de ângulo sólido}}$$

e, em qualquer superfície fechada, a integral do ângulo sólido resulta em 4π

Por exemplo, em coordenadas esféricas:



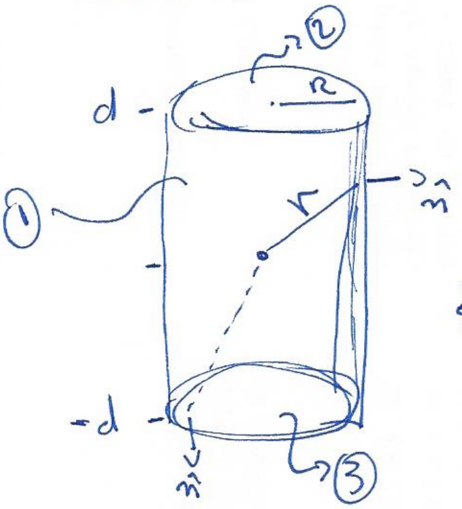
$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$$

$\hat{n} // \hat{r}$

$$\hat{n} = \hat{r} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = 1}$$

$$\therefore \int_S \frac{\cos\theta}{r^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi}{\cancel{r^2}} = 4\pi$$

em coordenadas cilíndricas



$$\int_S \frac{\hat{n}\cdot\hat{r}}{r^2}\,dA \rightarrow \text{preciso quebrar em}$$

3 superfícies: lateral (1), ~~topo~~ disco superior (2) e disco inferior (3)

na superfície lateral $\hat{n} = \hat{\rho}$ e $dA = R\,d\varphi\,dz$

nos discos $\hat{n} = \hat{z}$ e $dA = \rho\, d\varphi\, d\rho$

e $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$; $\hat{r} = \dfrac{\rho\hat{\rho} + z\hat{z}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \int_{S_{(1)} \rightarrow \text{lateral}} \frac{\hat{n}\cdot\hat{r}}{r^2}\,dA = \int_{-d}^{d}\int_0^{2\pi} \frac{\overset{=\boxed{\rho = R}}{R}\; R\,d\varphi\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi \cdot \int_{-d}^{d} \frac{R^2\,dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi \int_{-d}^{d} \frac{dz/R}{\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}} = 2\pi \int_{-d/R}^{d/R} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right) \Bigg|_{-\frac{d}{R}}^{\frac{d}{R}} = 4\pi \cdot \frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}$$

$$\int_{S_{2} \to \text{superior}} \frac{\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}\, dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\overset{z=d}{d} \cdot \rho \cdot d\varphi\, d\rho}{\left(\sqrt{\rho^2+d^2}\right)^3} = 2\pi \cdot \int_0^R \frac{\rho/d \cdot d\rho/d}{\left(\left(\frac{\rho}{d}\right)^2+1\right)^{3/2}}$$

$$= 2\pi \int_0^{R/d} \frac{u\, du}{(u^2+1)^{3/2}} = 2\pi \left(\frac{-1}{(u^2+1)^{1/2}} \right) \Bigg|_0^{R/d} = 2\pi \left(\frac{-d}{\sqrt{R^2+d^2}} + 1 \right)$$

de forma idêntica $\displaystyle\int_{S_3 \to \text{inferior}} \frac{\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}\, dA = 2\pi \left(\frac{-d}{\sqrt{R^2+d^2}} + 1 \right)$

Somando as três superfícies:

$$\int_S \frac{\hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2}\, dA = 4\pi \frac{\cancel{d}}{\cancel{\sqrt{R^2+d^2}}} + 4\pi \left(\frac{\cancel{-d}}{\cancel{\sqrt{R^2+d^2}}} + 1 \right) = 4\pi$$

Assim, voltamos que o fluxo gravitacional que emana de uma massa m por qualquer superfície fechada é $\Phi_m = -Gm4\pi = -4\pi Gm$

Se temos mais que uma massa o fluxo total é simplesmente a soma de todos os fluxos:

$$\Phi_m = \int_S \hat{n}\cdot\vec{g}\, dA = -4\pi G \sum_i m_i$$

e, se for uma distribuição contínua de massas temos:

$$\int_S \hat{n}\cdot\vec{g}\, dA = -4\pi G \int_V \rho\, dV$$

onde V é o volume dentro da superfície $\underline{\underline{S}}$

Usando agora o teorema do divergente de Gauss:

$$\int_S \vec{g}\cdot\hat{n}\, dA = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv$$

chegamos que $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{g}\, dv = -4\pi G \int_V \rho\, dV$

Mas isso é válido p/ qualquer volume, portanto

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G \rho}$$

Usando que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ temos que

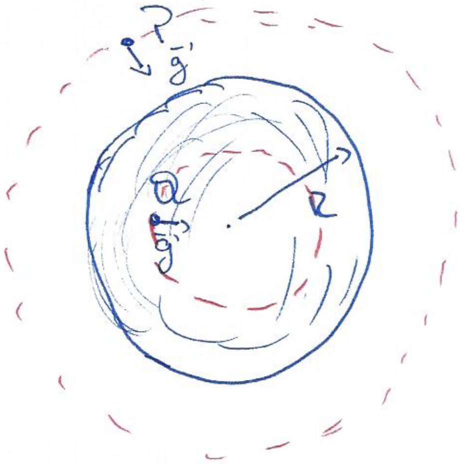
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = 4\pi G\rho \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\Phi = 4\pi G\rho}$$

Equação de Poisson

Quando um problema oferece simetrias, ex. esferica, cilindrica, o uso das equações acima torna muito mais simples a solução do problema!

Ex: $\vec{g}$ devido à uma esfera uniforme de massa M e raio R.



Pela simetria do problema tanto no ponto P quanto no ponto Q, $\vec{g}$ tem direção radial e

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\theta\, g_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\varphi}$$

como $\vec{g} = g\hat{r} \Rightarrow g_\theta = 0$ e $g_\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) = -4\pi G\rho}$$

tomando uma superficie esférica que passa por P temos

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dv = \int_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, dA = \int_S g_r\, dA = \int_v -4\pi G \rho\, dv$$

$a > R$

sendo $g = g(r) \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(a)\, a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \cancel{4\pi} R^2 g(a) = -\cancel{4\pi} G M$

$$\therefore \boxed{g(a) = -\frac{GM}{a^2}}$$

$a < R$

em Q temos $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(a)\, a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -4\pi G \rho\, dv$

$= \cancel{4\pi}\, a^2 g(a) = -\cancel{4\pi} G \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 \rho \Rightarrow$

$\hookrightarrow \rho = \dfrac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$

$$g(a) = -G \cdot \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}} a \cdot \frac{M}{\frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{3}} R^3}$$

$$\boxed{g(a) = -\frac{G \cdot M a}{R^3}}$$