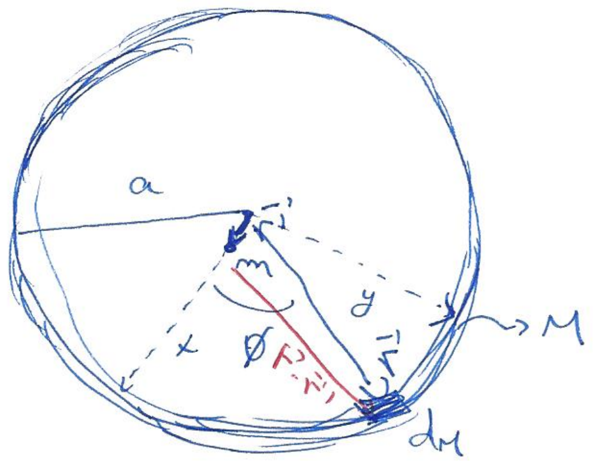
Vamos agora, discutir o problema de uma massa "$\underline{m}$" no centro de um anel de raio a e massa M.

Considerando, então, esse sistema, vamos calcular o ponto de equilíbrio, no plano do anel, e verificar se esse é ou não estável!



Sendo o anel uniforme, temos que

$$\lambda = \frac{M}{2\pi a} \quad \text{ou}$$

$$dM = a.\lambda.d\phi$$

Assim, o potencial gravitacional, num ponto $\vec{r}'$ dentro do anel é:

$$d\Phi = -G\frac{dM}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -G\frac{a.\lambda.\,d\phi}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Agora, $|\vec{r}-\vec{r}'| = |(a.\cos\phi\,\hat{x} + a\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{y} - r'\,\hat{x})|$

$= (a^2 + r'^2 - 2ar'\cos\phi)^{1/2}$ $\therefore$

$$\Phi = -G\lambda a \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(a^2+r'^2-2ar'\cos\phi)^{1/2}}$$

No caso em que a nossa m esteja próxima da origem, ou seja, se $r' \ll a$ (Note que, pela simetria do problema, a origem é, obviamente, um ponto de equilíbrio, portanto, fazer a análise em torno dela é uma aproximação bem razoável), podemos usar:

$$\Phi = -\frac{G\lambda a}{a}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left(1+\frac{r'^2}{a^2}-2\frac{r'}{a}\cos\phi\right)^{1/2}}$$

e

$$\frac{1}{\left(1-\left[\frac{r'^2}{a^2}-\frac{2r'}{a}\cos\phi\right]\right)^{1/2}} \simeq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{r'^2}{a^2}-\frac{2r'}{a}\cos\phi\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{r'^2}{a^2}-\frac{2r'}{a}\cos\phi\right)^2$$

$$= 1-\frac{1}{2}\frac{r'^2}{a^2}+\frac{r'}{a}\cos\phi+\cancelto{0}{\frac{3}{8}\frac{r'^4}{a^4}}-\cancelto{0}{\frac{3}{2}\left(\frac{r'}{a}\right)^3\cos\phi}+\frac{3}{2}\frac{r'^2}{a^2}\cos^2\phi$$

desprezando os termos de ordem > 2 (pois $r \ll a$) temos:

$$= 1+\frac{r'}{a}\cos\phi+\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{a}\right)^2\cdot\left(3\cos^2\phi-1\right)$$

e a integral fica muito mais simples:

$$\Phi = -G\lambda\left[\int_0^{2\pi}d\phi+\cancelto{0}{\frac{r'}{a}\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi}+\frac{1}{2}\frac{r'^2}{a^2}\int_0^{2\pi}\left(3\cos^2\phi-1\right)d\phi\right]$$

$$= -G\lambda\cdot\left(2\pi+\frac{1}{2}\frac{r'^2}{a^2}\cdot\left[(-2\pi)\cdot 3\left(\frac{\phi}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\phi\right)_0^{2\pi}\right]\right)$$

$$= -G\lambda\left(2\pi + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{a}\right)^2\left(3\pi - 2\pi\right)\right) = \boxed{-2\pi\lambda G - \lambda G\frac{\pi}{2}\left(\frac{r'}{a}\right)^2}$$

Sendo $\lambda = \frac{M}{2\pi a}$ $\therefore$ $\Phi = -\frac{GM}{a} - \frac{GM}{4a}\cdot\left(\frac{r'}{a}\right)^2$

$$\therefore \quad U(r') = -\frac{GMm}{a}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r'}{a}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow \frac{dU}{dr'} = -\frac{GMm}{a}\cdot\frac{r'}{2a^2} \Rightarrow \frac{d^2U}{dr'^2} = \frac{-GMm}{2a^3} < 0$ p/

qualquer r' $\Rightarrow$ a menor movimentação de m

fora da origem faz com que m seja atraído para

a superfície do anel.

Força de Maré

Vamos discutir como a força gravitacional influencia

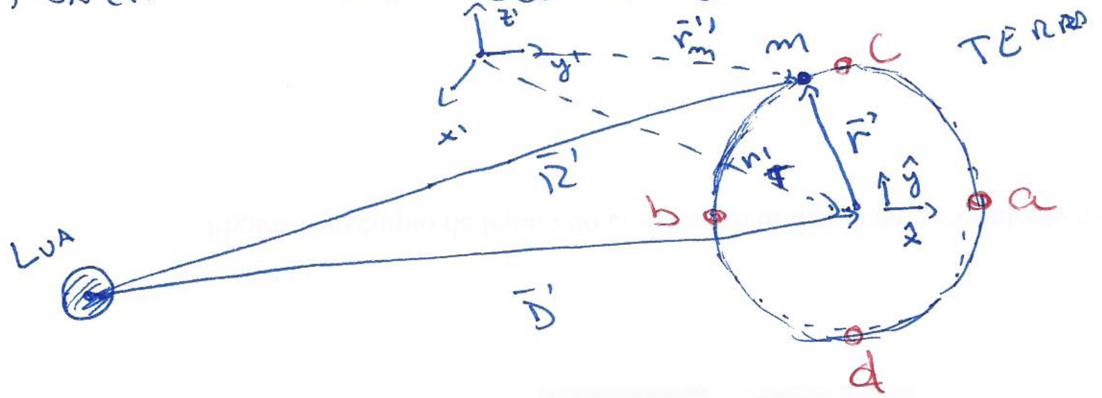
a formação de maré alta e baixa.

Para isso, o cálculo completo é extremamente complexo

e deve considerar diversos fatores como as imperfei-

ções da superfície terrestre, a rotação dos corpos, etc.

Aqui vamos olhar p/ o problema simplificado, para isso, consideramos uma massa $\underline{m}$ posta a uma distância $\vec{r}$ do centro da terra:



Agora, a aceleração da massa m ~~...~~ em relação à terra é

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_m - \ddot{\vec{r}}_T = -\frac{G M_T \cancel{m}}{\cancel{m}\, r^2}\hat{e}_r - \frac{G M_L \cancel{m}}{\cancel{m}\, R^2}\hat{R} + \frac{G M_L \cancel{M_T}}{\cancel{M_T}\, D^2}\hat{D}$$

$$= \underbrace{-\frac{G M_T}{r^2}\hat{r}}_{\text{atração gravitacional da terra}} - \underbrace{G M_L \left(\frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{D}}{D^2}\right)}_{\text{Força de maré}}$$

portanto, a força que a Lua faz na massa $\underline{m}$ de água e na terra, chamada de Força de maré é:

$$\vec{F}_{maré} = -G M_L m \left(\frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{D}}{D^2}\right)$$

No ponto $\underline{a}$ temos que a força é

$$\vec{F}^{\,a}_{maré} = -G m M_L \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{D^2}\right)\hat{x}$$

Mas ~~D =~~ $R = D + r$ ∴

$$\vec{F}^{\,a}_{maré} = -GmM_L\left(\frac{1}{(D+r)^2} - \frac{1}{D^2}\right)\hat{x} = -\frac{GM_Lm}{D^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{D}\right)^2} - 1\right)\hat{x}$$

Se $D \gg r$ temos

$$\vec{F}^{\,a}_{maré} \simeq -\frac{GmM_L}{D^2}\left(\cancel{1} - 2\frac{r}{D} + \cancel{3\frac{r^2}{D^2}}^{\to 0} - \dots - \cancel{1}\right)\hat{x}$$

$$\vec{F}^{\,a}_{maré} = 2GmM_L\frac{r}{D^3}\hat{x}$$ (ou seja, a água "afasta" da terra!)

em $\underline{\underline{b}}$ como $R = D - r$ temos

$$\vec{F}^{\,b}_{maré} = -2GmM_L\frac{r}{D^3}\hat{x}$$ (ou seja, a água "afasta" da terra)

Agora, se considerarmos que $M_L \simeq 0{,}012\,M_T$

$D \simeq 400.000$ km ∴ $\frac{r}{D} \simeq 0{,}016$

$r \simeq 6.400$ km

temos que

$$\frac{F_{maré}}{F_{T\,grav.}} = \frac{\frac{-2GM_Lmr}{D^3}}{\frac{-GM_Tm}{r^2}} \simeq \frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{r^3}{D^3} \simeq 10^{-7}$$

Vamos olhar agora no ponto c (and)

Nesse caso:

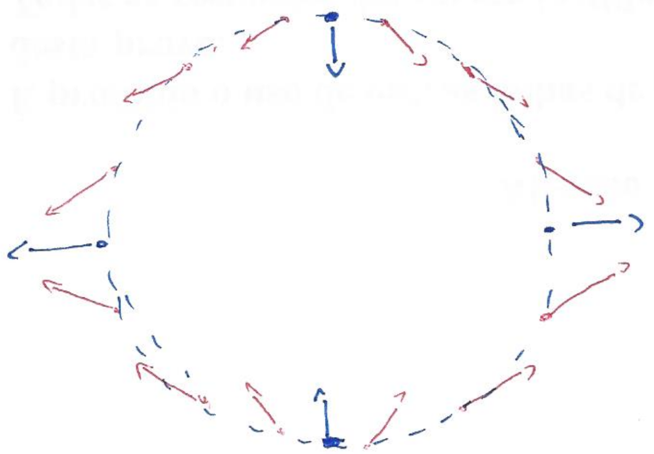
$$\vec{F}^{\,c}_{maré} = -GM_Lm\left(\frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{\hat{D}}{D^2}\right),$$ mas $r \ll D$

então, $\vec{R}' = D\hat{D} + r\hat{r}$ e $\hat{R} \simeq \hat{D} + \frac{r}{D}\hat{r}$ e $R^2 \simeq D^2$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}'^{c}_{maré} = -GM_L m\left(\frac{\hat{D}}{D^2} + \frac{r}{D^3}\hat{r} - \frac{\hat{D}}{D^2}\right) =$$

$$\vec{F}'^{c}_{maré} = -\underline{GM_L m}\frac{r}{D^3}\hat{r} = -GM_L m\frac{r}{D^3}\hat{y}$$

em (d) temos $\vec{F}'^{d}_{maré} = +GM_L m\frac{r}{D^3}\hat{y}$



Note que, para um ponto arbitrário, x, y temos

$$F_x = \frac{2GmM_L x}{D^3} = \frac{2GmM_L r\cos\theta}{D^3}$$

$$F_y = \frac{-GM_L m\, y}{D^3} = -\frac{GmM_L r\,\text{sen}\theta}{D^3}$$

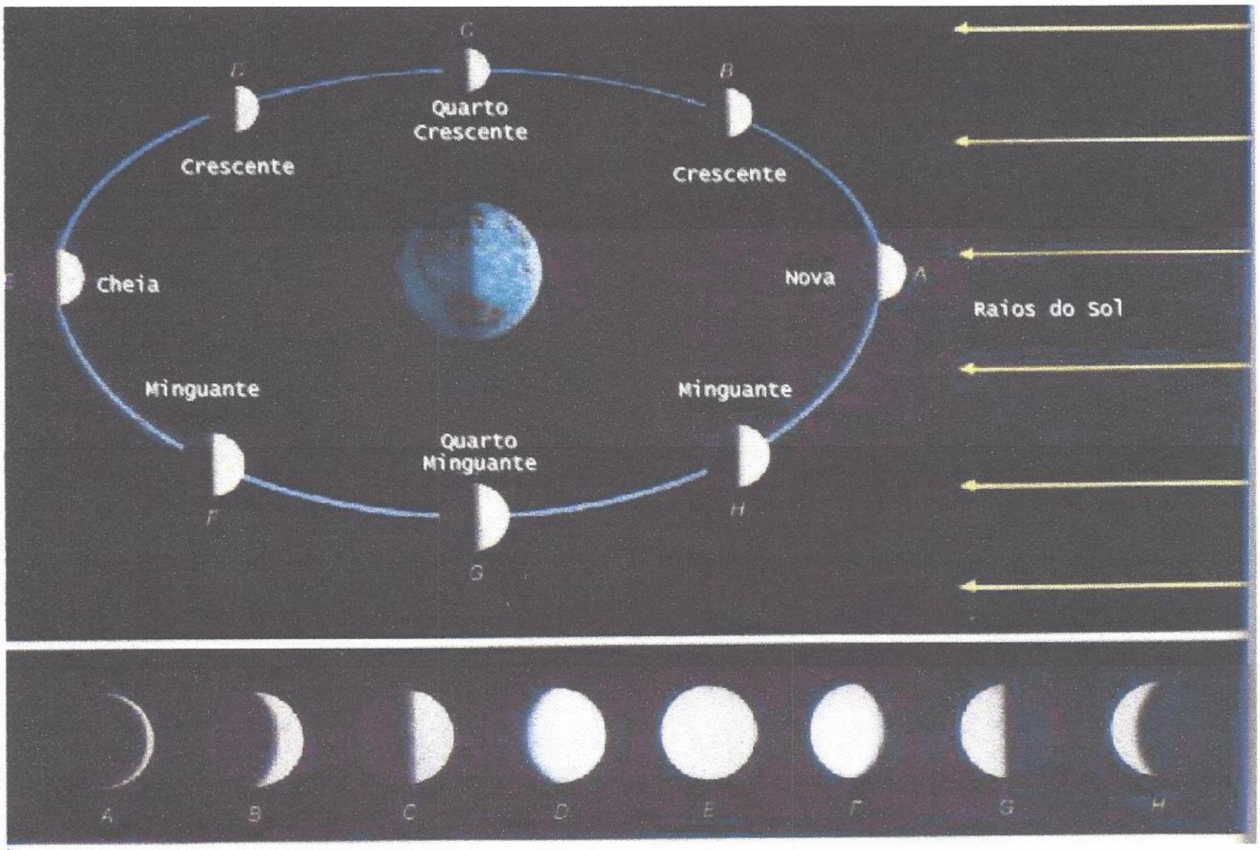
E a contribuição do sol?

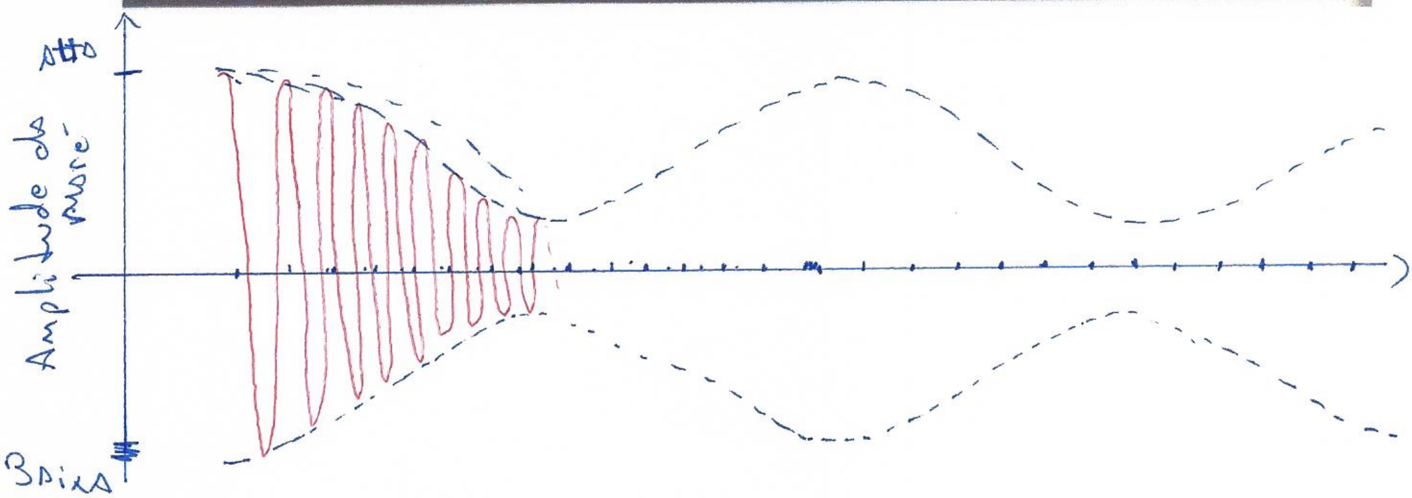
$M_{SOL} \simeq 333000\, M_T$

$D_{SOL} \simeq 150.000.000$ km

$|F_{maré_{SOL}}| \simeq \frac{1}{2}|F_{maré_{LUA}}|$

Quando temos a maré mais alta?





Quantos marés altos e baixas temos em 1 dia?