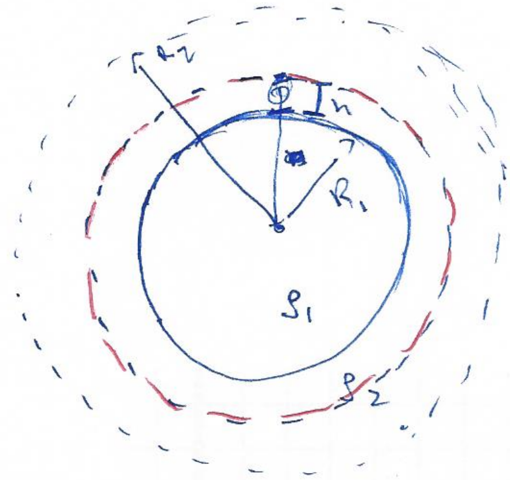
Exemplos e Revisão:

1) Um planeta esférico homogêneo (densidade ρ_1 e raio R_1) está envolto por uma nuvem de poeira (densidade ρ_2 e raio R_2). Uma partícula de massa m está localizada à uma altitude h a partir da superfície do planeta, dentro da nuvem.

Calcular a força gravitacional e o potencial gravitacional



Como o problema tem simetria esférica, podemos usar as equações do teorema de Gauss:

$$\int_S \hat{n} \cdot \vec{g}\, da = -4\pi G \int_V \rho\, dV$$

Mas $\vec{g} = g(r)\,\hat{r} \Rightarrow \hat{n} = \hat{r}$ numa superfície esférica!

$\therefore$ Numa superfície esférica de raio r $g(r) = \text{constante}$ (pois só depende do módulo de "$\vec{r}$")

$$\therefore \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} g(R_1+h)\,(R_1+h)^2 \cdot \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = -4\pi G \left[\int_0^{R_1} \cancel{4\pi}\rho_1 r^2 dr + 4\pi \int_{R_1}^{R_1+h} \rho_2 r^2 dr\right]$$

$$\Rightarrow g(R_1+h) \cdot (R_1+h)^2 \cdot \cancel{4\pi} = -4\pi G \cdot \cancel{4\pi} \cdot \left[\frac{R_1^3}{3}\rho_1 + \rho_2 \cdot \left[\frac{(R_1+h)^3}{3} - \frac{R_1^3}{3}\right]\right]$$

Assim:

$$g(R_1+h) = -\frac{4\pi G}{3(R_1+h)^2}\left[R_1^3 \rho_1 + \rho_2 (R_1+h)^3 - R_1^3\right]$$

Chamando $R_1+h = z$ ∴

$$\vec{g}(z) = -\frac{4\pi G}{3}\cdot\left(\frac{R_1^3}{z^2}\rho_1 - \frac{R_1^3}{z^2}\rho_2 + z\rho_2\right)\hat{r}$$

$$\therefore \quad \vec{F}(z) = \frac{-4\pi G m}{3}\cdot\left(\frac{R_1^3}{z^2}\rho_1 - \frac{R_1^3}{z^2}\rho_2 + z\rho_2\right)\hat{r}$$

Para encontrar o potencial basta calcular:

$$\Phi(r) - \Phi(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{g}\cdot d\vec{r}$$

A questão é, agora: que ponto tomamos como "r_0"!?

deve ser um ponto no qual conhecemos $\Phi(r_0)$.

O único ponto que conhecemos $\Phi(r_0)$ é $r_0 \to \infty$ tal que

$\Phi(\infty) \to 0$

Mas, para $r > R_2$ $\vec{g}(r)$ é diferente do que foi calculado acima. Então, precisamos achar $g(r > R_2)$:

Pelos mesmos argumentos temos:

$$g_{out}(r)\cdot r^2 \cdot 4\pi = -4\pi G\cdot 4\pi\left[\int_0^{R_1} \rho_1 r^2 dr + \int_{R_1}^{R_2} \rho_2 r^2 dr\right] \Rightarrow$$

$$g_{out}(r)\cdot r^2 = -\frac{4\pi G}{3}\cdot\left[\rho_1 R_1^3 + \rho_2 (R_2^3 - R_1^3)\right]$$

$$\vec{g}_{out}(r) = -\frac{4\pi G}{3r^2}\left(\rho_1 R_1^3 + \rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right)\hat{r}$$

Assim, temos:

$$\Phi(z) - \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\Phi(r_0)} = \Phi(z) - \Phi(R_2) + \Phi(R_2) - \Phi(\infty) = -\left[\int_{R_2}^{z} g(r)\,dr + \int_{\infty}^{R_2} g_{out}(r)\,dr\right]$$

$$= -\int_{R_2}^{z} -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{R_1^3}{r^2}\rho_1 - \frac{R_1^3}{r^2}\rho_2 + r\rho_2\right)dr - \int_{\infty}^{R_2} -\frac{4\pi G}{3r^2}\cdot\left(\rho_1 R_1^3 + \rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right)dr$$

$$= \frac{4\pi G}{3}\cdot\left[-\frac{R_1^3}{r}\rho_1 + \frac{R_1^3}{r}\rho_2 + \frac{r^2}{2}\rho_2\right]\Bigg|_{R_2}^{z} + \frac{4\pi G}{3}\cdot\left(\rho_1 R_1^3 + \rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{R_2}$$

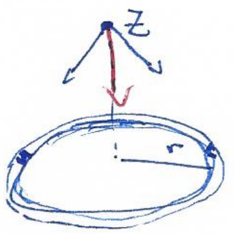
$$\Phi(z) = -\frac{4\pi G}{3}\cdot\left[\frac{R_1^3}{z}\rho_1 - \frac{R_1^3\rho_2}{z} - \frac{z^2}{2}\rho_2 + \cancel{\frac{\rho_1 R_1^3}{R_2}} + \rho_2 R_2^2 - \cancel{\frac{\rho_2 R_1^3}{R_2}}\right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{R_1^3\rho_1}{R_2}} + \cancel{\frac{R_1^3}{R_2}\rho_2} + \frac{R_2^2}{2}\rho_2\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(z) = -4\pi G\cdot\left(\frac{R_1^3}{3z}\rho_1 - \frac{R_1^3}{3z}\rho_2 - \frac{z^2\rho_2}{6} + \frac{R_2^2}{2}\rho_2\right)}$$

2) Calcule o vetor campo gravitacional em um ponto z acima de um plano infinito de densidade superficial de massa σ. (147)

Como o plano é infinito, podemos considerá-lo como um conjunto de aneis de comprimento $2\pi r$ e espessura dr:



pela simetria do problema, $\therefore$ vemos que o campo resultante deve ser na direção $\hat{z}$

Agora, o potencial em z, causado por um anel de massa dM é $\therefore$

$$d\Phi(z) = -\frac{G\,dM}{(r^2+z^2)^{1/2}} \qquad dM = \sigma . 2\pi\, dr$$

$\Rightarrow$ p/ um disco de raio a temos:

$$\Phi(z) = -G.\sigma \int_0^a \frac{2\pi r\, dr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = -\frac{2\pi G\sigma.}{z} \int_0^a \frac{r\, dr}{\left(1+\frac{r^2}{z^2}\right)^{1/2}}$$

Sendo $u = \frac{r}{z} \Rightarrow \begin{array}{l} dr = z\,du \\ r = z u \end{array}$

$$\Phi(z) = -2\pi G\sigma z \int_0^{a/z} \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}} = -2\pi G\sigma z . \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}} - 1\right)$$

$$\Phi(z) = -2\pi G\sigma \left(\sqrt{z^2+a^2} - z\right)$$

portanto, como $\vec{g}(z) = g(z)\,\hat{z}$ temos

$$\vec{g}(z) = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{d\Phi}{dz}\,\hat{z} = +2\pi G\sigma \cdot \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - 1 \right) \hat{z}$$

Se $a \to \infty$ temos que $\dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \to 0 \Rightarrow \boxed{\vec{g}(z) = -2\pi G \sigma\,\hat{z}}$

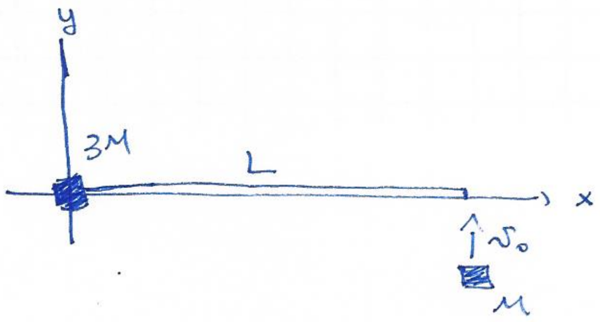
— | — | —

3) Um bloco de massa 3M conectado a um bastão "sem massa" e comprimento L repousa em uma superfície horizontal sem atrito. Um segundo bloco, de massa M bate na outra ponta do bastão, com velocidade v_0, ficando grudado ao bastão após o choque perpendicular. Assumindo que os dois blocos tenham dimensões desprezíveis, quando comparados com L, calcule:

a) a velocidade final do C.M. do sistema.

b) A velocidade angular final do sistema em relação ao centro de massa.

c) Qual a velocidade das massas 3M e M após o choque?.



a) Sabemos que $\vec{P} = M_{total} \cdot \dot{\vec{R}}$ = momento do C.M.

Considerando o sistema todo, não há força externa agindo $\therefore$ $\vec{P}$ = constante $\Rightarrow$

$$P_{inicial} = M \cdot v_0 = P_{final} = (M + 3M) \cdot v_f$$

Assim $v_f = \frac{1}{4} v_0$ = velocidade do C.M.

b) Por conservação de momento angular temos:

$$L_i = L_f$$

Considerando o bastão no eixo x temos:

$$x_{CM} = \frac{0 \cdot 3M + L \cdot M}{4M} = \frac{L}{4}$$

Assim, inicialmente, logo antes do impacto, temos

$$L_i = I_i \omega_i \Rightarrow I_i = M \cdot r^2, \text{ mas } r = L - \frac{L}{4} = \frac{3L}{4}$$

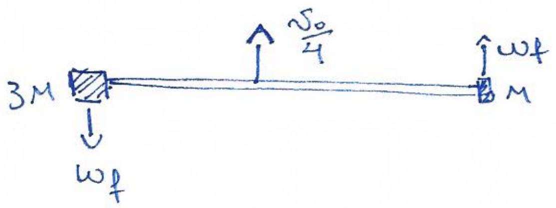
$$\Rightarrow I_i = \frac{9ML^2}{16} \quad e \quad \omega_i = \frac{v_0}{r} = \frac{4v_0}{3L} \Rightarrow L_i = \frac{9ML^2}{16} \cdot \frac{4v_0}{3L}$$

$$\boxed{L_i = \frac{3MLv_0}{4L}} \qquad I_f = \frac{9ML^2}{16} + 3M \cdot \frac{L^2}{16} = \frac{12ML^2}{16} =$$

$$I_f = \frac{3ML^2}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{3MLv_0}{4L} = \frac{3ML^2}{4}\cdot\omega_f \quad \therefore \quad \boxed{\omega_f = \frac{V_0}{L}}$$

c) ~~A~~



P/ 3M temos $V_f = \frac{V_0}{4} - \omega_f\cdot\frac{L}{4} = \frac{V_0}{4} - \frac{V_0}{L}\cdot\frac{L}{4} = 0$

P/ M $V_f = \frac{V_0}{4} + \omega_f\cdot\frac{3L}{4} = \frac{V_0}{4} + \frac{V_0\, 3L}{4L} = V_0$

Exemplo 4) O giroscópio duplo!

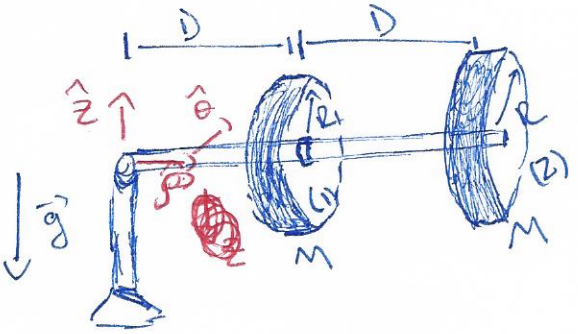
Dois discos de massa M e raio R, montados num eixo rígido de comprimento 2D. O eixo é fixo no disco mais externo (2) e livre p/ girar em relação à (1).

O eixo, assim como (2) estão girando com velocidade angular ω_0. Assumindo os eixos e o ponto de rotação com massas desprezíveis, e precessão constante, calcule:

a) A taxa de precessão Ω considerando que disco (1) ~~esteja~~ não esteja girando.

b) Se o atrito entre o eixo e o disco (1) gera um torque τ_f constante, qual a velocidade angular final dos discos e a nova taxa de precessão

c) Quanto energia é dissipada p/ acelerar o disco (1)



a) para calcular o torque do sistema temos:

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{r} \times \vec{F} = D\hat{\rho} \times (-Mg)\hat{z} + 2D\hat{\rho} \times (-Mg)\hat{z}$$

$$= 3DMg\,\hat{\theta}$$

$$\text{Agora,} \quad \vec{L} = \overbrace{\frac{MR^2}{2}\omega_0 \cdot \hat{\rho}}^{\text{disco (2)}} + \underbrace{(\overbrace{MD^2\Omega}^{\text{precessão disco(1)}} + \overbrace{4MD^2\Omega}^{\text{precessão disco(2)}})}_{\text{constante}}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{MR^2}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + 0$$

$$\text{Assim,} \quad \frac{MR^2}{2}\omega_0 \cdot \Omega\,\hat{\theta} = 3DMg\,\hat{\theta} \quad \therefore$$

$$\boxed{\Omega = \frac{6Dg}{\omega_0 R^2}}$$

b) $\vec{L}_\rho = \frac{MR^2}{2}\omega\,\hat{\rho} \Rightarrow$ se há um torque τ_{atrito} em $\hat{\rho}$

temos: $\cancel{\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt}\hat{\rho}} + \cancel{\frac{MR^2}{2}\omega\Omega\,\hat{\theta}}$

~~disco (1)~~

Neste caso, a taxa de aceleração do disco (1) é

$$\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_\rho}{dt} = \frac{MR^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = \tau_{atrito}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\tau_{atrito}}{MR^2} \quad \therefore \quad \omega(t) = \frac{2\tau_{atrito}}{MR^2}t$$

$\omega(0) = 0$ pois (1) estava sem girar!

~~quando~~ assim, a velocidade angular de (2) é

$$\omega_2(t) = \omega_0 - \frac{2\tau_{atrito}}{MR^2}t$$

se $\omega_1(t) = \omega_2(t)$ o $\tau_{atrito} \to 0$ e o sistema gira junto $\Rightarrow$ a velocidade final é se $\frac{2\tau_{atrito}t}{MR^2} = \omega_0 - \frac{2\tau_{atrito}t}{MR^2}$

$$\therefore t = \omega_0 \cdot \frac{MR^2}{4\tau_{atrito}} \Rightarrow \omega_f = \cancel{2}\frac{\cancel{\tau_{atrito}}}{\cancel{MR^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2}\frac{\omega_0 \cancel{MR^2}}{\cancel{\tau_{atrito}}}$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{\omega_0}{2}}$$

Nesse caso, o momento angular do sistema é

$$\vec{L} = \overbrace{\frac{MR^2}{2}\frac{\omega_0}{2}}^{\text{disco(1)}}\hat{\rho} + \overbrace{\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{\omega_0}{2}}^{\text{disco(2)}}\hat{\rho} + (MD^2\Omega + 4D^2M\Omega)\hat{z}$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{MR^2}{2}\omega_0 \cdot \Omega\,\hat{\theta} = 3DMg\,\hat{\theta}$$

Note que Ω NÃO muda!

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{6Dg}{\omega_0 R^2}}$$

por que??

c) Antes do atrito:

$$T_0 = \frac{1}{2} I \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega_0^2$$

Após o atrito:

$$T_f = \frac{1}{2} I \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \frac{\omega_0^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \frac{\omega_0^2}{4}$$

Mas $T_f - T_0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{MR^2}{2} \frac{\omega_0^2}{2} = \boxed{-\frac{1}{8} MR^2 \omega_0^2}$