Cálculo Variacional

Vamos introduzir aqui um caminho novo para tratar a mecânica Newtoniana. Para isso, passamos a discutir alguns princípios de cálculo variacional.

De forma geral, nosso interesse é encontrar caminhos que nos dê uma solução extrema, por exemplo, o tempo mínimo, a menor distância, a menor energia, a maior área, etc.

O problema mais básico é determinar a função $y(x)$ tal que a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x)\, dx$$

encontre um valor extremo.

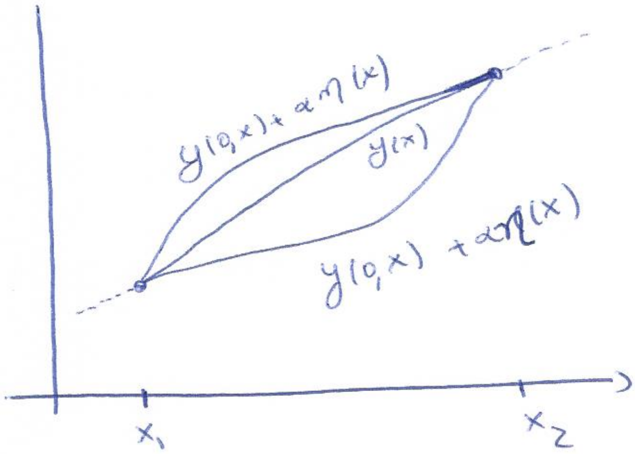
Aqui temos que $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ e x é a variável independente.

Seja a função $y(x)$ que satisfaça $J \equiv$ mínimo/extremo, então, podemos definir

$$y(\alpha, x) = \overbrace{y(0, x)}^{y(x)} + \alpha\, \eta(x)$$

onde $\eta(x)$ é uma função contínua com $\frac{d\eta}{dx}$ contínua e com $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ pois precisamos que

$$y(\alpha, x_1) = y(x_1)$$
$$y(\alpha, x_2) = y(x_2)$$



dessa forma, escrevemos:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha,x), y'(\alpha,x); x\} dx$$

desta forma, p/ que $J(\alpha)$ seja um extremo em $\alpha = 0$ precisamos: $\left.\dfrac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$

ou seja: $$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha,x), y'(\alpha,x); x\} dx$$

como os limites de integração são definidos, não dependem de α, portanto:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha}\left[f(y(\alpha,x), y'(\alpha,x); x\right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) dx$$; todavia: $\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x)$, $\dfrac{\partial y'}{\partial \alpha} = \dfrac{d\eta(x)}{dx}$

logo: $\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) x$

mas, $\int_a^b u\,dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy'} \frac{d\eta}{dx} dx = \frac{df}{dy'} \eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) . \eta(x)\,dx$

Agora, como $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ temos que o segundo termo à direita é nulo e

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \eta(x) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) . \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] dx$$

e isso deve ser nulo p/ qualquer $\eta(x)$

Assim, a solução é:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0} \Rightarrow \text{Equação de Euler}$$

Ou seja, $y(x)$ satisfazer a equação de Euler é condição necessária p/ que J seja um extremo!

Um exemplo que surge logo deste ~~m~~étodo é encontrar a menor distância entre dois pontos num plano (x, y)

~~Ta~~ A distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por

$$J = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Assim, $J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ ou seja,

$f(y(x), y'(x); x) = \sqrt{1 + y'^2}$ $\therefore$ A equação de Euler torna-se

$$\cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$\therefore$ temos que $\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$ = constante

ou seja $\dfrac{y'^2}{1 + y'^2} = C^2 \Rightarrow y'^2 = C^2 + C^2 y'^2 \Rightarrow$

$$y'^2 (1 - C^2) = C^2$$

$$\therefore \quad y' = \sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}} = a = \text{constante} \quad \therefore$$

$$\frac{dy}{dx} = a \Rightarrow y = ax + b$$

onde a e b são dados pelos pontos (x_1, y_1); (x_2, y_2).

Outro exemplo que mostra bem a aplicação da equação de Euler é o problema da Braquistócrona:

Uma partícula indo de (x_1, y_1) p/ (x_2, y_2) sob a ação de uma força constante! Qual o caminho p/ tempo mínimo.

Vamos assumir que em (x_1, y_1) a partícula está em repouso. Assim, podemos assumir que a força constante é aplicada na direção $\hat{x}$

$\Rightarrow$ seja a força $F_0 \hat{x}$ temos que a energia potencial dessa força é: $U(x) = -F_0 x$

E, se $U(x_1) = 0$ temos

$$T(x_1) + U(x_1) = 0 = U(x) + T(x) = 0$$

$$T(x) = \frac{mv^2}{2} = -U(x) = F_0 x \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2F_0}{m} x}$$

O tempo p/ ir de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) é

dado por $\quad t = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt \quad$ onde $\quad dt = \dfrac{ds}{v}$

e $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, portanto,

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{\frac{2f_0}{m} x}}\, dx \Rightarrow$$

$f(y, y'; x) = \sqrt{\dfrac{1 + y'^2}{x}}$ (Note que $\sqrt{\frac{2f_0}{m}}$ é constante e pode sair da função)

∴ Aplicando a equação de Euler temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Novamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \therefore \quad \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y'} =$ constante

por questão de simplicidade futura, chamaremos a constante de $C \equiv (2a)^{-1/2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{x}\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad \therefore \quad \frac{y'^2}{x(1 + y'^2)} = \frac{1}{2a}$$

$$2a\, y'^2 = x + x y'^2 \Rightarrow (2a - x)\, y'^2 = x$$

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2a - x}} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \frac{x\,dx}{(2ax - x^2)^{1/2}} \quad \Rightarrow$$ fazendo a mudança de variável:

$$x = a(1 - \cos\theta)$$

$$dx = \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$(2ax - x^2)^{1/2} = \left(2a^2 - \cancel{2a^2\cos\theta} - a^2 \cancel{+ 2a^2\cos\theta} - a^2\cos^2\theta\right)$$

$$= a^{\cancel{2}}(1 - \cos^2\theta)^{1/2} = a \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$y = \int \frac{\cancel{a}(1 - \cos\theta) \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta}{\cancel{a}\, \cancel{\operatorname{sen}\theta}} = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} x &= a(1 - \cos\theta) \\ y &= a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}\right\} \text{cicloide}$$

[a e θ resultam das condições iniciais!]