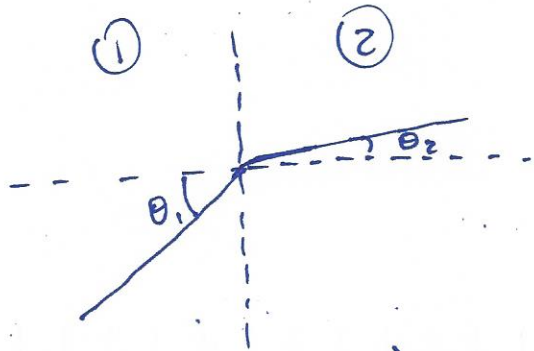
Segundo o princípio de Fermat, a luz viaja de um ponto ~~a~~ p/ um ponto b pelo caminho que MINIMIZA o tempo.

Assim, se temos uma interface entre 2 meios de índice de Refração n_1 e n_2, temos:

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \quad ; \quad v_2 = \frac{c}{n_2}$$



Agora, $t = \int_a^b \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\, dx$

$\therefore$ temos que, pela equação de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$\therefore \dfrac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} =$ constante.

Agora, $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta_1 \quad (1)$

$\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta_2 \quad (2)$

e ~~…~~

temos que

$$\frac{y_1'}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{y_2'}{v_2\sqrt{1+y_1'^2}} = \text{constante}$$

$$= \frac{tg\,\theta_1}{\frac{c}{n_1}\cdot\sqrt{1+tg^2\theta_1}} = \frac{tg\,\theta_2}{\frac{c}{n_2}\sqrt{1+tg^2\theta_2}} = \frac{n_1 tg\,\theta_1}{\cancel{c}\,\sec\theta_1} = \frac{n_2\, tg\,\theta_2}{\cancel{c}\,\sec\theta_2}$$

$$= n_1\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\cancel{\cos\theta_1}}\cdot\cancel{\cos\theta_1} = n_2\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\cancel{\cos\theta_2}}\cancel{\cos\theta_2}$$

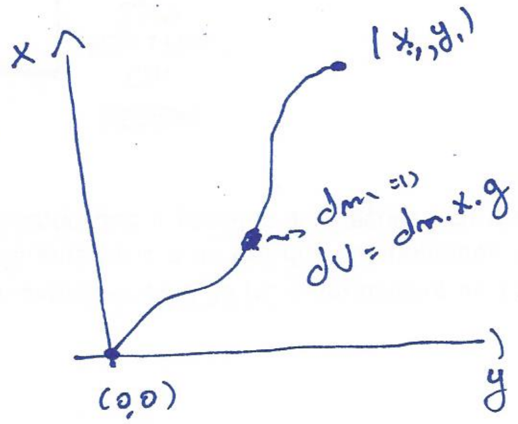
$\therefore$ $\boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2}$ que é a lei de refração de Snell.

Problema da Catenária

Imagine uma corda uniforme flexível. Uma de suas pontas é preso na origem (0,0) e a outra em um ponto (x,y). Qual o formato que esta corda ficará sob a ação da gravidade?

Neste caso, precisamos minimizar sua energia potencial

Para facilitar as contas, vamos inverter os eixos de modo que a gravidade esta em "x"



para um pedacinho de corda, com massa "dm", a energia potencial será:

$$dU = g.x.dm$$

mas como a corda é uniforme $\Rightarrow dm = \overset{\text{constante}}{\hat{\lambda}}.ds$

Assim: $dU = g x \lambda ds = g x \lambda \sqrt{1+y'^2}\, dx$

e $U = \int_0^{x_1} g x \lambda \sqrt{1+y'^2}\, dy \Rightarrow f(y, y'; x) = x\sqrt{1+y'^2}$

e a equação de Euler torna-se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x\, y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

Assim, $\frac{x\, y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow x^2 y'^2 = C^2(1+y'^2)$

$$\Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{x^2-C^2}} \Rightarrow y(x) = \int \frac{C}{\sqrt{x^2-C^2}}\, dx$$

fazendo $\frac{x}{C} = \cosh\theta \Rightarrow dx = C.\operatorname{senh}\theta\, d\theta$

$$y(x) = \int \frac{C.\operatorname{senh}\theta\, d\theta}{\sqrt{\cosh^2\theta - 1}} = C.\int \frac{\cancel{\operatorname{senh}\theta}}{\cancel{\operatorname{senh}\theta}}\, d\theta = C.\theta + b$$

portanto: $y(x) = c \cdot \text{Arccosh}\left(\frac{x}{c}\right) + b$

ou $$\boxed{x(y) = c \cdot \cosh\left(\frac{y-b}{c}\right)}$$

onde c e b dependem de (x_1, y_1)

Este exemplo é resolvido no Thornton & Marion mas com a finalidade de se encontrar a curva que, se rodada em torno de um eixo, gera a superfície de MENOR ~~maior~~ área superficial ~~volume~~! Veja o ex: 6.3.

Existe uma segunda forma da Equação de Euler que pode ser conveniente quando a função f não depende explicitamente da variável x, ou seja, se $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Vamos escrever

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}}_{0}$$

Agora, $$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

ou seja, $$y''\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

ASSIM:

$$\frac{df}{dx} = y'\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - y'\frac{d\partial f}{dx\,\partial y'} =$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)}_{\text{Eq. de Euler}} = 0$$

$\therefore$

ou seja,

$$\boxed{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}}$$

Segunda forma da Equação de Euler.

Outra particularidade da Equação de Euler surge no caso de existir mais que uma variável dependente, por exemplo $y(x)$ e $z(x)$, de modo que

$$f \rightarrow f\{y(x), y'(x), z(x), z'(x); x\}$$

de forma mais geral, podemos ter N variáveis dependentes: $y_1(x) \dots y_N(x)$ e

$$f\{y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots, y_N(x), y_N'(x); x\}$$

Analogamente ao que já foi feito, podemos escrever

$$y_i(\alpha,x) = y_i(0,x) + \alpha\eta_i(x)$$

de modo que:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)\right)\eta_i(x)\,dx = 0$$

Como cada $\eta_i(x)$ é independente, a equação acima precisa "zerar" p/ cada termo "i" ~~inde~~ independentemente dos demais. Desta forma, se temos N variáveis dependentes de x, teremos N equações de Euler. Resultando em um sistema de N equações e N funções

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad \text{p/} \quad i = 1 \dots N$$

O outro caso importante das equações de Euler ocorre quando o movimento está restrito a alguma condição de vínculo. Este vínculo pode aparecer diretamente nas variáveis ou em forma de integral.

No primeiro caso, imagine que estamos restritos ao movimento em uma superfície específica. Digamos, por exemplo, na superfície de uma esfera.

Nesse caso específico temos que

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

e essa é nossa condição de vínculo.

Para casos como este, escrevemos nossa função de vínculo como $g\{y_i; x\} = 0$. Por exemplo, p/ o caso da esfera, temos:

$$g(y, z; x) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Na situação na qual temos

$$f(y, y', z, z'; x)$$

e um vínculo do tipo: $g\{y, z; x\} = 0$, o problema pode ser resolvido de 2 formas: A primeira consiste em escrever, a partir da equação de vínculo, $z(x, y)$ de modo que $f(y, y', z, z'; x) \rightarrow f(y, y'; x)$

E resolvemos o problema p/ apenas uma variável dependente.

Neste caso perdemos algumas informações do vínculo, que ficará mais claro quando discutirmos as equações de "Euler-Lagrange".

A segunda forma de resolver este problema leva em conta as DUAS variáveis dependentes e a condição de vínculo, ou seja, resolvemos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} \right] \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right\} dx$$

e consideramos

$$g\{y, z; x\} = 0$$

o que faz com que $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ NÃO POSSAM mais ser independentes, de modo que ~~eu~~ não podemos mais resolver a equação acima p/ "y" e "z" de formas separadas.

Agora, tomando que:

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0$$

de modo que $\frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}$.

ou ainda: $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right) - \left[\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) \right] \frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z} \right\}}_{\text{isso tem que ser zero!}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Com isso temos:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}=\left[\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\right]\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}$$

posso, então, igualar ambos lados à uma função de x, $\lambda(x)$

e $$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}=-\lambda(x)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=-\lambda(x)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

ou ainda: $$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)+\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

Similarmente para z: $$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)+\lambda(x)\frac{\partial g}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

Essas são as equações de Euler com vínculo e temos três equações, (1) e (2) acima, mais a equação de vínculo g p/ encontrarmos as três funções $y(x)$, $z(x)$ e $\lambda(x)$.

Essa função $\lambda(x)$ é ~~~~ chamada de fator multiplicador indeterminado de Lagrange e tem papel fundamental na Lagrangeana quando queremos entender relações de vínculo.

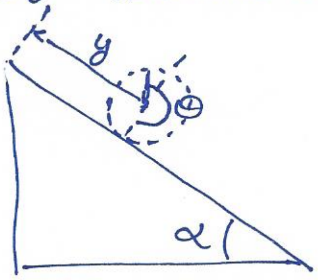
De forma geral, para o caso de termos N variáveis dependentes e n relações de vínculo, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j(x)\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1 \dots N$$

$$g_j(y_i\,;x) = 0 \qquad j = 1 \dots m$$

Ou seja, teremos N funções $y_i(x)$ e m funções $\lambda_j(x)$, somando um total de $N+m$ funções e N equações de Euler e m equações de vínculo, somando $N+m$ equações.

Exemplo: Considere um disco rolando sem deslizar num plano inclinado, qual a relação de vínculo?



Neste caso, sabemos que

$$y = R\theta \quad \text{e}$$

$$g(y,\theta) = y - R\theta = 0$$

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R$$

Veremos adiante que, neste caso, o vínculo indicará o torque que faz girar o disco.