Forças dependentes da velocidade

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$$

Força que depende explicitamente da velocidade pode ser paralela à essa velocidade ou NÃO.

Um exemplo de força dependente da velocidade que NÃO é paralela à essa velocidade é a ~~lei de~~ Força de Lorentz de uma partícula num campo magnético

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Na ausência de um campo elétrico externo,

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F}(\vec{v}) = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

discutiremos essa força em mais detalhe mais para frente. Agora, vamos focar em forças que são paralelas ~~ao~~ à velocidade da partícula, ou seja:

$$\vec{F}(\vec{v}) = \underbrace{-}_{\text{sentido oposto.}}\, k\,.\, m\,.\, v^{n}\,.\, \underbrace{\hat{v}}_{\text{direção de } \vec{v}}$$

Resultados empíricos mostram que dois casos são os mais comuns:

1) Para o caso de um meio viscoso e um corpo se movendo à baixa velocidade: (11)

└> sem turbulência.

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

Para o caso de uma esfera pequena de raio r movendo-se em um fluido viscoso de coeficiente η temos que

$$\vec{F} = -b\vec{v} = -6\pi r \eta . \vec{v}$$

Assim, a velocidade terminal ~~pode ser obtida~~ no caso de queda vertical sob a ação da gravidade pode ser calculada por:

$$m\ddot{y} = -mg - bv = m\dot{v}$$

└> note que na queda $\vec{v} = v\hat{y}$ ou seja $v < 0$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{b}{m}v\right) \Rightarrow dv = -\left(g + \frac{bv}{m}\right)dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g + \frac{bv}{m}}{g + \frac{bv_0}{m}}\right) = -\frac{b}{m}t$$

$$\text{se } v_0 = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{g + \frac{bv}{m}}{g}\right) = -\frac{b}{m}t$$

$$\left(g + \frac{bv}{m}\right) = g . e^{-\frac{bt}{m}} \quad \therefore \boxed{v = \frac{mg}{b} . \left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)}$$

p/ $t \to \infty$ o termo $e^{-\frac{bt}{m}} \to 0$

e $v(\infty) \to -\frac{mg}{b}$ $\Rightarrow$ p/ a esfera temos

$$v_{terminal} = \frac{-mg}{6\pi r \eta}$$

Agora, sendo $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$

$$v_{terminal} = -\frac{\rho \cdot 4\cancel{\pi} \cdot r^{\cancel{3}\,2}}{6\cancel{\pi} \cdot 3 \cancel{r}\, \eta} \cdot g = \boxed{-\frac{\rho}{\eta}\frac{2}{9} r^2 g}$$

Exemplo: barco com velocidade inicial v_0 em um lago tem o motor desligado:

$v(0) = v_0$
$x(0) = 0$ $\quad$: $\quad m\ddot{x} = -bv = m\dot{v}$

$\therefore \quad m\frac{dv}{dt} = -bv \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{-b}{m}dt \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{b}{m}t$

Assim $v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow$

$X(t)$: $\quad \frac{dx}{dt} = v(t) \therefore \int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m}t'} dt'$

$$\Rightarrow X(t) = -\frac{m v_0}{b} \cdot \left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)$$

ou seja, p/ $t \to \infty$ temos que

$$v(t \to \infty) \Rightarrow 0$$

e $X(t)$ p/ $t \to \infty$ é $\boxed{X_\infty \simeq \frac{m v_0}{b}}$

2) O segundo caso trata-se de velocidades mais altas e corpos mais massivos. Neste caso, a força de resistência é dada por:

$$\vec{F}_v = -k \cdot v^2 \hat{v} \Rightarrow k = \frac{1}{2} C_d \cdot \rho \cdot A$$

C_d → coef. de arrasto

A → área do objeto!

ρ → densidade do meio

Este é o caso típico de resistência do ar.

Exemplo: um carro viajando à 50 km/h precisa de 10 hp de potência do motor p/ vencer a resistência do ar. Qual a potência necessária caso o carro passe a viajar a 100 km/h?

Sendo a força de arrasto $\vec{F}_v = -k v^2 \cdot \hat{v}$, p/ v = constante, $\vec{F}_v$ = constante. Neste caso, podemos escrever a potência como ∴

$$P = -\vec{F} \cdot \vec{v} = +k v^3$$ ∴ se p/ 50 km/h

$P = 10\,hp \Rightarrow$ p/ 100 km/h $\Rightarrow P = 80\,hp.$

Por fim, vamos discutir o caso de lançamento de projeteis incluindo a resistência do ar (sem turbulência)

Assim: $$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -mg\hat{y} - b\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ou ainda, $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{y} - b\vec{v}$$
$\hookrightarrow b = km$

Ou seja: em $\hat{x}$: $$\cancel{m}\frac{dv_x}{dt} = -k\cancel{m}\, v_x \quad \therefore$$

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{x0}}\right) = -kt \quad \therefore \quad \boxed{v_x = v_{x0}\, e^{-kt}}$$

e $\sqrt{\text{Assumindo } x(0)=0}$ $$x(t) = \int_0^t v_{x0}\, e^{-kt}\, dt \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_{x0}}{k}\cdot\left(1-e^{-kt}\right)}$$

já em $\hat{y}$: $$\cancel{m}\frac{dv_y}{dt} = -\cancel{m}g - k\cancel{m}\, v_y$$

$$\frac{dv_y}{\left(\frac{g}{k}+v_y\right)} = -k\,dt \quad \therefore \quad \ln\left(\frac{\frac{g}{k}+v_y}{\frac{g}{k}+v_{y0}}\right) = -kt$$

$$\left(\frac{g}{k}+v_y\right) = \left(\frac{g}{k}+v_{0y}\right)e^{-kt} \quad \therefore$$

$$\boxed{v_y(t) = -\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k}+v_{0y}\right)e^{-kt}}$$

Assim,

$$y(t) = \int_0^t \left[-\frac{g}{k} + \left(\frac{g}{k} + v_{oy}\right) e^{-kt}\right] dt$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{g}{k}t + \frac{(g + k v_{oy})}{k^2} \cdot (1 - e^{-kt})}$$

Agora, usando que $e^{-kt} = \left(1 - \frac{kx}{v_{ox}}\right)$ e $t = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_{ox}}\right)$

temos

$$y(x) = +\frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_{ox}}\right) + \left(\frac{g + k v_{oy}}{k^{\cancel{2}}}\right)\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{kx}{v_{ox}}\right)$$

$$y(x) = \left(\frac{g}{k} + v_{oy}\right)\frac{x}{v_{ox}} + \frac{g}{k^2} \cdot \ln\left(1 - \frac{kx}{v_{ox}}\right)$$

Agora, se $k \to 0$ temos

$$y(x) = \cancel{\frac{g}{k v_{ox}} x} + \frac{v_{oy}}{v_{ox}} \cdot x + \frac{g}{k^2}\left[0 - \cancel{\frac{x}{v_{ox}} \cdot k} - \frac{x^2}{v_{ox}^2}\frac{1}{2}k^2 \ldots\right]$$

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}}\right)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_{ox}^2}}$$