Outras vezes ocorre que a equação de vínculo surge como uma integral. Por exemplo, no caso da catenária, ~~podemos~~ quando uma corda flexível é pendurada entre dois pontos, podemos colocar o vínculo de que a corda tem comprimento "L" ou seja, o vínculo é tal que:

$$L = \int_a^b ds = \text{constante}.$$

Neste caso, a função $y(x)$ que resolve a equação

$$J[y] = \int_a^b f\{y, y'; x\} dx$$

deve ser tal que $y(a)$ e $y(b)$ satisfaçam as condições de contorno e que

$$K[y] = \int_a^b g\{y, y'; x\} dx = \text{constante}.$$

Se assumirmos que temos um parâmetro λ constante tal que $\int_a^b (f + \lambda g) dx$ tenha um extremo,

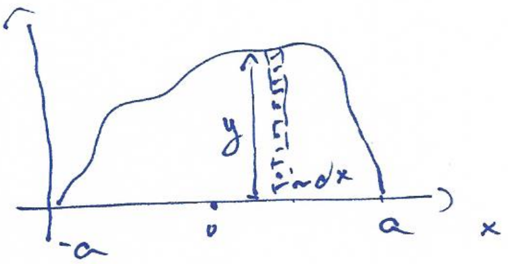
temos que:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] + \lambda\left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}\right] = 0$$

e sujeito aos vínculos:

$$y(a) = A$$
$$y(b) = B$$
$$K[y] = \text{constante}$$

Exemplo: Uma corda de comprimento L $(L > 2a)$ é presa entre os pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ qual a curva que dá a maior área.



$$J = \int_{-a}^{a} y \, dx$$

os vínculos são $y(-a) = y(a) = 0$

e $$K = \int_{-a}^{a} ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = L$$

$$\therefore \quad f(y, y'; x) = y$$
$$g(y, y'; x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

com isso: $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Consequentemente:

$$1 - \frac{d}{dx} 0 + \lambda \cdot \left(0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\lambda}(x - c_1)$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = (x - c_1) \quad \therefore \quad \frac{\lambda^2 y'^2}{1+y'^2} = (x-c_1)^2$$

$$\Rightarrow [\lambda^2 - (x-c_1)^2] y'^2 = (x-c_1)^2 \Rightarrow y' = \frac{(x-c_1)}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}}$$

fazendo $u = \frac{x - c_1}{\lambda} \Rightarrow du = \frac{dx}{\lambda}$

$$y = \int \frac{\lambda u \, du}{\sqrt{1-u^2}} = \lambda . \sqrt{1-u^2} + C_2 \Rightarrow$$

$$y - C_2 = \sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2} \Rightarrow \boxed{(y-C_2)^2 + (x-c_1)^2 = \lambda^2}$$

ou seja, a curva é um arco de círculo centrado em $(C_1 ; C_2)$, com raio λ.

Pela simetria do problema, $\boxed{C_1 = 0}$ $\therefore$

$$(y - C_2)^2 + x^2 = \partial^2 \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{\partial^2 - x^2} + C_2$$

tomando y positivo: $y = \sqrt{\partial^2 - x^2} + C_2$

e $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{\partial^2 - x^2}} \Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{(\partial^2 - x^2)}}\, dx =$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\partial}{\sqrt{\partial^2 - x^2}}\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\partial}\right)^2}}\, dx \Rightarrow$$ fazendo $x = \partial \operatorname{sen}\theta$, $dx = \partial \cos\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow K = \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-a}{\partial}\right)}^{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\partial}\right)} \frac{\partial \cancel{\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}} = \partial \cdot \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\partial}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-a}{\partial}\right)\right] = 2\partial \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\partial}\right)$$

$$\therefore L = 2\partial \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\partial}\right)$$

também, se $x = \pm a$, $y = 0 \therefore \boxed{C_2 = -\sqrt{\partial^2 - a^2}}$

Se $a = \partial \Rightarrow C_2 = 0$ e $\boxed{L = 2\pi \frac{a}{2} = \pi a}$

Uma notação útil nestes problemas é a "Notação δ":

Lembrando que $\displaystyle \frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \overbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}^{\eta(x)} dx$

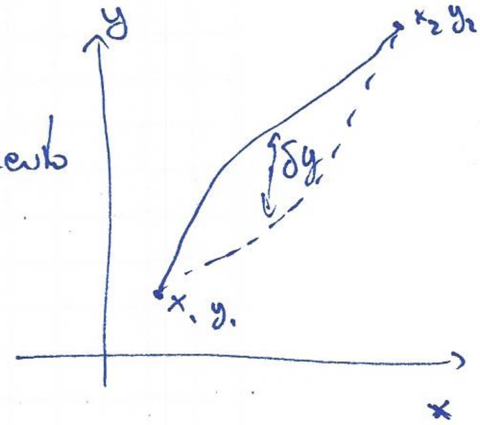
Como x; x_1 e x_2 NÃO dependem de α, podemos escrever:

$$\underbrace{\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta J} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha}_{\delta y} dx$$

ou seja, definimos:

$$\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha$$



O δy representa um pequeno deslocamento do caminho ideal.

Nesta notação, escrevemos:

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y, y' ; x\} dx = 0$$

Ou seja, a solução ideal é aquela cuja variação δJ anula-se.