Princípio de Hamilton

Uma forma alternativa p/ a solução de problemas de mecânica é o uso da "mecânica Lagrangeana" que surge a partir do princípio de Hamilton:

"De todos os possíveis caminhos ao longo dos quais um sistema dinâmico pode movimentar-se de um ponto a outro, num intervalo de tempo, o caminho efetivamente seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre a energia cinética e potêncial".

Também chamado de princípio da "mínima ação" o princípio de Hamilton pode ser escrito matematicamente como:

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} (T - U)\, dt = 0$$

Ou seja, ~~que~~ através do cálculo variacional!

Agora, note que o cálculo variacional prevê que, se $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\, dt = 0$, logo, a integral tem um extremo, não necessariamente um ~~máximo~~ mínimo! Todavia, nos nossos casos de interesse ele sempre será um mínimo.

Apesar de válido p/ casos gerais, de forças NÃO CONSERVATIVAS, neste curso vamos dar ênfase para o problema no qual $U \rightarrow U(x_i)$ ou seja, para o qual a energia potencial é escrita como função apenas da posição x_i

Então, se pensarmos em coordenadas fixas retangulares x_i, a energia cinética depende apenas das velocidades $\dot{x}_i$, e, com um campo de forças conservativo, a energia potencial depende apenas de x_i:

$$T \rightarrow T(\dot{x}_i) \quad ; \quad U \rightarrow U(x_i)$$

e, definimos uma função $L(x_i, \dot{x}_i)$ tal que

$$L(x_i, \dot{x}_i) \equiv T(\dot{x}_i) - U(x_i)$$

onde $L(x_i, \dot{x}_i)$ é a <u>função</u> <u>LAGRANGEANA</u>. e o princípio de Hamilton torna-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i)\, dt = 0$$

Vamos agora, fazer um paralelo com o cálculo variacional e a equação de Euler:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)\, dx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Note que, matematicamente, ambos são idênticos ao fazermos as trocas:

$$x \to t$$
$$y_i(x) \to x_i(t)$$
$$y_i'(x) \to \dot{x}_i(t)$$
$$f(y_i(x); y_i'(x); x) \to L(x_i(t), \dot{x}_i(t))$$

portanto, a Equação de Euler para este problema é escrita como:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad \text{p/ cada } x_i$$

Essas são as equações de Euler-Lagrange ou as equações de Lagrange do movimento.

Por exemplo, p/ um oscilador harmônico em 1-D a equação de Lagrange torna-se:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad ; \quad U = \frac{1}{2} k x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \, , \, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

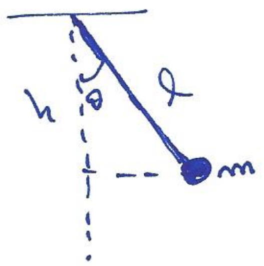
$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - (-m\ddot{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$kx + m\ddot{x} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

que é o mesmo resultado esperado pela mecânica Newtoniana.

Vamos olhar o caso do pendulo plano:



$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \quad L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\,\mathrm{sen}\theta \; ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \; \therefore \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mgl\,\mathrm{sen}\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$

ou. $$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

Vejam que eu resolvi o problema p/ θ mesmo sem este ser uma coordenada fixa retângular (ou seja, o vetor $\hat{\theta}$ aponta p/ direções distintas em função do tempo)! Não definimos também, de forma explicita, nenhuma força p/ o problema!

Mesmo assim, chegamos no mesmo resultado esperado pela mecânica newtoniana.

Isso sugere que o método da Lagrangeana pode ser usado com coordenadas mais gerais e não apenas aquelas fixas! Mais ainda, as coordenadas não precisam ter dimensão de distância!

Definimos então o conceito de <u>coordenadas generalizadas</u>!

Vamos considerar um sistema composto por n partículas. Cada partícula tem sua posição determinada por 3 coordenadas de modo que, para descrever o problema, precisamos de $3n$ coordenadas

Agora, caso existam m condições de vínculo, como por exemplo, quando duas partículas estão conectadas por uma haste rígida, o número de coordenadas necessárias para descrever o problema se reduz a $3n - m$. Ou seja, o sistema terá $s = 3n - m$ graus de liberdade.

Em ~~um~~ caso mais geral, essas $s = 3n - m$ coordenadas não precisam ser coordenadas retangulares, nem esféricas ou cilíndricas. De fato, nem unidade de distância elas precisam ter. Podem ter unidade de "área", "volume", "energia", ou "sem dimensão", etc.

Essas coordenadas são chamadas de <u>coordenadas generalizadas</u> e são definidas como o conjunto de quantidades que especificam completamente o estado de um sistema: $q_1, q_2, \dots q_N$ ou simplesmente q_j

Para descrever um sistema com $s = 3n - m$ graus de liberdade, precisamos de $\underline{\underline{s}}$ coordenadas generalizadas!

O problema surge com o fato de que NÃO existe uma "receita" ou "regra" para descobrir qual o melhor conjunto de coordenadas generalizadas para resolver um dado problema! Ou seja, o único jeito de "ficar bom nisso" é com bastante TREINO! Em outras palavras, resolvendo um monte de exercícios.

Da mesma forma que definimos as coordenadas generalizadas, podemos definir suas derivadas temporais; $\dot{q}_j$, que são as velocidades generalizadas.

Sendo $x_{i,\alpha}$ a coordenada fixa retangular x_i da partícula α ⇒ a equação que relaciona $x_{i\alpha}$ com as coordenadas generalizadas q_j depende dos q_j's e também pode depender explicitamente do tempo, t. De forma geral, essa transformada é dada por:

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha,i}(q_1, \dots q_s, t)$$

ou :

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha,i}(q_j; t)$$

e as velocidades relacionam-se por:

$$\dot{x}_{\alpha i} = \dot{x}_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j; t)$$

Da mesma forma, as transformadas inversas tornam-se:

$$q_j = q_j(x_{i\alpha}, t)$$
$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{i\alpha}, \dot{x}_{i\alpha}; t)$$

e as m equações de vínculo são escritas como: $f_k(x_{i\alpha}, t) = 0 \qquad k = 1 \dots m$

Exemplo: Encontre as coordenadas generalizadas p/ uma partícula movendo na superfície de ~~uma esfera~~ hemisfério ($z \geq 0$)

Como é a superfície do hemisfério, temos

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{ou} \qquad \boxed{z \geq 0}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

ou ainda: $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - 1 = 0$

uma forma de escolher as coordenadas é

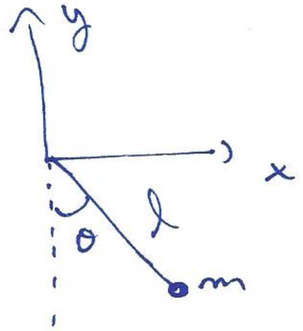
$$q_1 = \frac{x}{R} \; ; \; q_2 = \frac{y}{R} \; ; \; q_3 = \frac{z}{R}$$

mas $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \Rightarrow \boxed{q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}}$

↳ eq. de vínculo

Ou seja, escolhendo q_1 e q_2 como coordenadas generalizadas já é suficiente, se usamos a eq. de vínculo p/ q_3.

Exemplo: Encontrar o L p/ um pendulo simples em coordenadas retangulares, transforme p/ cilíndricas e encontre a equação do movimento.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$U = mgy$$

Assim, $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

Agora, vamos transformar (de acordo com o esquema acima) como função de θ:

$$x = l \operatorname{sen}\theta$$
$$y = -l \cos\theta$$

portanto, $\dot{x} = l \dot{\theta} \cos\theta$

$$\dot{y} = l \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta$$

ou seja, $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + mgl\cos\theta$

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

e, da mesma forma que no exemplo já resolvido,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \operatorname{sen}\theta \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mgl \operatorname{sen}\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta = 0}$$

Por fim, vejamos como fica o problema do Lançamento
de projétil em coordenadas retangulares e polares:

retangulares: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad U = mgy$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

em x: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \; \therefore \; \frac{d}{dt}m\dot{x} = \boxed{m\ddot{x} = 0}$

em y: $\frac{\partial L}{\partial y} = -mg \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \; \therefore \; \frac{d}{dt}m\dot{y} = m\ddot{y}$

ASSIM $\quad -mg - m\ddot{y} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} = -mg}$

Agora, em polares:
$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 \qquad U = mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

r: $\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2}m.2r\dot{\theta}^2 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$

$\underline{mr\dot{\theta}^2 - mg\,\mathrm{sen}\,\theta - m\ddot{r} = 0}$

θ: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$

$\underline{-mgr\cos\theta - 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2\ddot{\theta} = 0}$

Note que a escolha errada pode resultar em contas absurdas!