Neste ponto já podemos reescrever o princípio de Hamilton dizendo que o caminho percorrido é o qual minimiza a integral temporal da Lagrangeana

Agora, nós definimos a Lagrangeana como a diferença entre a energia cinética e a potencial, ou seja, a Lagrangeana é uma função escalar e deve se manter invariante em uma mudança de coordenadas.

Vale notar, todavia, que por ser definida como T-U, a Lagrangeana pode ser indefinida com relação a um termo constante da energia potencial e isso não muda as equações do movimento.

Consequentemente, a Lagrangeana que definimos como

$$L = T(\dot{x}_{i\alpha}) - U(x_{i\alpha}) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t)$$

ou seja, a Lagrangeana pode ser escrita como função das coordenadas e velocidades generalizadas:

$$L = L(q_j, \dot{q}_j; t)$$

de modo que o princípio de Hamilton torna-se

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j; t)\, dt = 0$$

E as equações de Euler-Lagrange são escritas em termos dos q_j e $\dot{q}_j$:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad p/ \qquad j = 1 \ldots s$$

As condições p/ que as equações de Lagrange sejam válidas são:

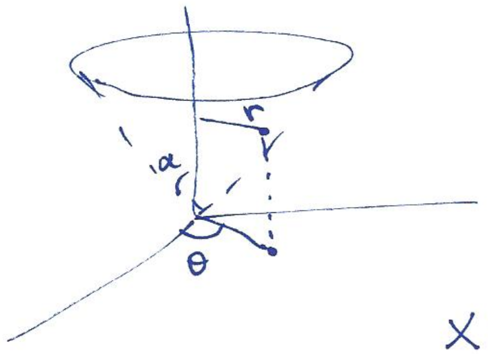
1) As forças agindo no sistema (sem contar as forças de vínculo) são deriváveis de uma energia potencial

2) As equações de vínculo devem ser relações entre coordenadas das partículas e podem conter explicitamente o tempo

Vamos agora resolver uma série de exemplos para ajudar a treinar na identificação das coordenadas e na interpretação dos resultados.

Exemplo 1:

Uma partícula de massa m move-se num cone de ângulo α com a vertical, sem atrito, e sob a ação da gravidade. Escolher as coordenadas generalizadas, o vínculo e resolver o problema por Lagrange.



inicialmente, podemos tomar:

x, y e z como as coordenadas.

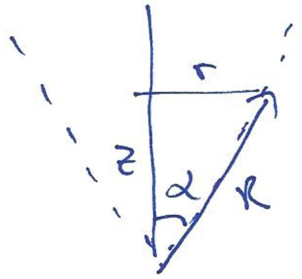
mas, fazendo a transformação p/

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\theta$$

$$z = z$$

podemos ainda colocar o vínculo que relaciona z e r,



$\therefore$ $r = R.\text{sen}\,\alpha$

$z = R.\cos\alpha$

$$\therefore \quad \frac{z}{r} = \cot\alpha \Rightarrow \quad z = r\cot\alpha \Rightarrow \text{vínculo}$$

Desta forma, necessitamos apenas de 2 coordenadas generalizadas, r e θ, de modo que:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2.\cot^2\alpha)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2\text{cossec}^2\alpha + (r\dot{\theta})^2)$$

$$U = mgz = mgr\cot\alpha$$

Assim, a Lagrangeana torna-se:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 \operatorname{cosec}^2\alpha + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \operatorname{cotg}\alpha$$

em θ: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

ou seja, $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$ e $mr^2\dot{\theta} = \text{constante} = L_z$

↳ momento angular em torno de z

em r: $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg \operatorname{cotg}\alpha$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \operatorname{cosec}^2\alpha$ ∴

$$mr\dot{\theta}^2 - mg\operatorname{cotg}\alpha - m\ddot{r}\operatorname{cosec}^2\alpha = 0$$

Assim, $r\dot{\theta}^2 - g\operatorname{cotg}\alpha - \ddot{r}\operatorname{cosec}^2\alpha = 0$

ou ainda, multiplicando tudo por $\operatorname{sen}^2\alpha$ temos:

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2\alpha + g \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0}$$

Note alguns comportamentos interessantes:

1) se $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow L_z = 0 \Rightarrow \ddot{r} = -g \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

Mas, Lembremos que $r = R\,\text{sen}\alpha \;\therefore\; \ddot{r} = \ddot{R}\,\text{sen}\alpha$

ASSIM $\ddot{R}\,\cancel{\text{sen}\alpha} = -g\,\cancel{\text{sen}\alpha}\cos\alpha \Rightarrow \underline{\ddot{R} = -g\cos\alpha}$

e esse resultado é a aceleração de um plano inclinado. Ou seja, se a ~~bolinha~~ MASSA não tem velocidade em θ, ela cai como num plano inclinado!

2) Se $\dot{\theta} = \omega$, qual r_0 no qual a partícula fica se movendo em círculo?

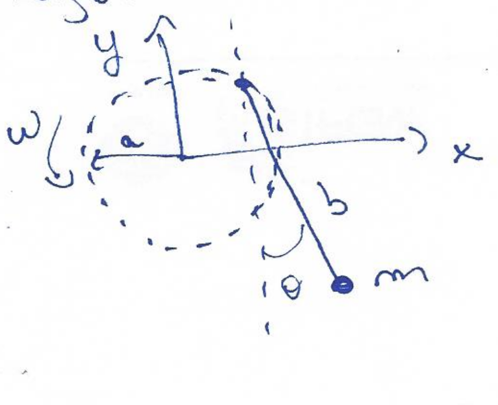
ou seja, se $\dot{\theta} = \omega$ e $r = r_0 \Rightarrow \dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$

ASSIM: $r_0\omega^2\,\text{sen}^2\alpha = g\,\cancel{\text{sen}\alpha}\cos\alpha$

$$\therefore\; r_0 = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\,\text{sen}\alpha}$$

<u>Exemplo 2</u>: O ponto de suporte de um pêndulo simples de comprimento $\underline{b}$ está preso a um anel de raio $\underline{a}$ de massa desprezível que está girando com velocidade angular constante, ω!

Encontrar as velocidades e acelerações em coordenadas retangulares e a aceleração angular $\ddot{\theta}$ (ângulo que o pêndulo faz com a vertical)



$$x = b\,\text{sen}\theta + a\cos\omega t$$

$$y = a\,\text{sen}\omega t - b\cos\theta$$

Assim $\dot{x} = b\cos\theta\,\dot{\theta} - a\omega\,\text{sen}\omega t$

$\dot{y} = a\omega\cos\omega t + b\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}$ } velocidades

Para encontrar as acelerações precisamos derivar novamente:

$$\ddot{x} = -b\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + b\cos\theta\,\ddot{\theta} - a\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{y} = -a\omega^2\,\text{sen}\omega t + b\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + b\,\text{sen}\theta\,\ddot{\theta}$$

Ou seja, o problema fica muito complexo em coordenadas retangulares. Por outro lado, temos que θ é a única coordenada generalizada que precisamos é:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left[a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega \cdot \text{sen}(\theta - \omega t)\right]$$

$$U = mgy = mg(a\,\text{sen}\omega t - b\cos\theta)$$

Assim,

$$L = T - U = \frac{m}{2}\cdot\left(a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega\,\text{sen}(\theta - \omega t)\right) - mg \cdot (a\,\text{sen}\omega t - b\cos\theta)$$

Com isso, a equação de Euler-Lagrange torna-se

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = bm\dot{\theta}a\omega\cos(\theta-\omega t) - mgb\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} + ba\omega m\,\text{sen}(\theta-\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mb^2\ddot{\theta} + ba\,\omega m\cos(\theta-\omega t)(\dot{\theta}-\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \cancel{bm\dot{\theta}a\omega\cos(\theta-\omega t)} - \cancel{m}gb\,\text{sen}\,\theta - \cancel{m}b^2\ddot{\theta} - ba\omega\,\cdot$$

$$\cdot\,\cancel{m}\cos(\theta-\omega t)\cancel{(\dot{\theta}}-\omega) = 0$$

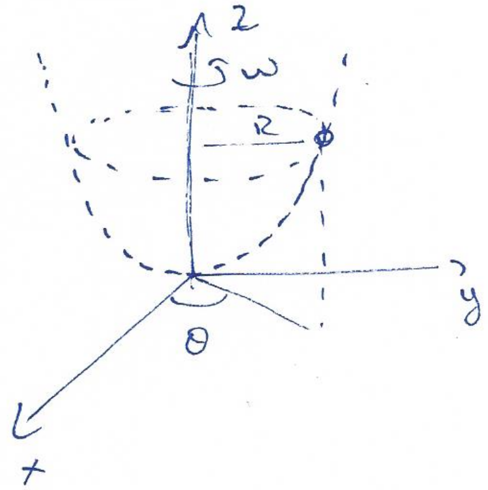
Assim:
$$-g\cancel{b}\,\text{sen}\,\theta - b^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{b}a\omega^2\cos(\theta-\omega t) = 0$$

ou
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{b}\,\text{sen}\,\theta - \frac{a}{b}\omega^2\cos(\theta-\omega t) = 0}$$

Note que se $a=0$ ou $\omega=0$ voltamos ao problema do pêndulo simples!

Exemplo 3:

Uma conta desliza, sob a ação da gravidade, ao longo de um arame dobrado em forma parabólica, $z = cr^2$. A conta perfaz um círculo de raio R quando o arame gira em torno de seu eixo vertical de simetria, com velocidade angular, ω. Calcular o valor de c



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

sendo $x = r\cos\theta$
$y = r \operatorname{sen}\theta$

temos: $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2)$

sendo as condições de vínculo:

$z = cr^2$ e $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t$

$\dot{z} = 2cr\dot{r} \Rightarrow$ $U = mgz = mgcr^2$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + 4c^2r^2\dot{r}^2 + r^2\omega^2] - mgcr^2$$

ou seja, como são dois vínculos, temos apenas uma coordenada generalizada, r!!

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4mc^2\dot{r}^2 r + mr\omega^2 - 2mgcr$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\left(1+4c^2r^2\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}\left(1+4c^2r^2\right) + 8m\dot{r}^2c^2r$$

$$\Rightarrow \cancel{4mc^2\dot{r}^2 r} + \cancel{m}r\omega^2 - 2\cancel{m}gcr - \cancel{m}\ddot{r} - 4\cancel{m}c^2r^2\ddot{r} - \overset{4}{\cancel{8}}\cancel{m}\dot{r}^2rc^2 = 0$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 + 4c^2r^2\ddot{r} + 4c^2\dot{r}^2r + 2gcr = 0$$

$\therefore$ se $\omega =$ constante e $r = R =$ constante temos

que: $\dot{r} = \ddot{r} = 0 \Rightarrow$

$$-R\omega^2 + 2gcR = 0 \quad \therefore \quad \boxed{c = \frac{\omega^2}{2g}}$$

Esses exemplos mostraram como o uso do vínculo para eliminar coordenadas pode facilitar a resolução do problema.

Agora, fazendo isso podemos perder informações importantes acerca das forças que resultam do vínculo.