Equações de Lagrange com multiplicadores

Se temos vínculos que dependem apenas das coordenadas, e não de velocidades, chamamos estes de vínculos holonômicos, e podemos resolver o problema com apenas as coordenadas resultantes.

Nos casos nos quais as equações de vínculos são dados por

$$f(x_{i\alpha}\,;\,\dot{x}_{i\alpha}\,;\,t) \quad ,$$

ou seja, se os vínculos dependem das velocidades, são os vínculos não-holonômicos, e não podem ser resolvidos de forma simples a menos que possam ser integrados p/ resultar em vínculos de coordenadas,

ex:

$$\dot{\theta} = \omega = \text{constante} \Rightarrow \boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$$

$$f(\theta, t) = \theta - \theta_0 - \omega t = 0 \Rightarrow$$ vínculo depende da coordenada!

No caso de vínculo do tipo

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0 \qquad i = 1,2,3$$

e se $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ e $B = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ e $f = f(x_i, t)$

A equação de vínculo torna-se:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

ou simplesmente: $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow f(x_i, t) = \text{const.}$

e o vínculo torna-se $f(x_i, t) - \text{constante} = 0$ que são as equações de vínculo que estamos acostumados.

A forma diferencial do vínculo pode ser escrita como (em coordenadas generalizadas)

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \qquad \begin{array}{l} k = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots s \end{array}$$

Desta forma, assim como fizemos no caso das equações de Euler, o vínculo aparece na equação de Euler-Lagrange como:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_k \lambda_k(t) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0$$

Talvez, a grande vantagem do método de Hamilton (Lagrange) é não precisar explicitar as forças agindo no sistema. Mas pode ser que tenhamos que calcular quais são as forças de vínculo envolvidas no problema.

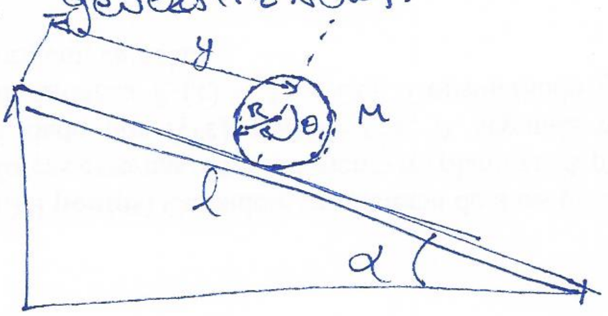
Os multiplicadores de Lagrange, $\lambda(t)$, estão relacionados às forças de vínculo pela equação:

$$\underline{Q_j} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}$$

$\hookrightarrow$ força generalizada de vínculo

O Q_j é a "Força generalizada de vínculo" que é como se fosse a "Força Resultante" agindo na coordenada q_j devido à todos os vínculos.

Exemplo 1: Considere um disco rolando sem deslizar em um plano inclinado. Encontrar: a) Equações do movimento. b) forças generalizadas.



A energia cinética é composta por um termo de translação ($\dot{y}$) e outro de rotação ($\dot{\theta}$)

Assim $$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I_{disco} \dot{\theta}^2$$

Agora, $I_{disco} = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2$

$$U = Mg(l - y)\, \text{sen}\, \alpha$$

Como não está deslizando temos:

$$y = R\theta \Rightarrow f(y, \theta) = y - R\theta = 0$$

↳ vínculo!!

podemos substituir $\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$ em T e resolver

só p/ y pois só precisamos de uma coordenada generalizada. Mas, ao fazer isso, perdemos informações sobre as forças de vínculo.

Para termos tais informações precisamos fazer:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Assim, temos: $L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l-y)\operatorname{sen}\alpha$

y:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= Mg \operatorname{sen}\alpha \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= M\dot{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad Mg\operatorname{sen}\alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0$$

θ:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -R \end{aligned}\right\} \quad -\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} - \lambda R = 0$$

do vínculo temos $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R}$

Assim, $\lambda = -\frac{1}{2} M \ddot{y}$

e $-\frac{3M}{2}\ddot{y} = -Mg\operatorname{sen}\alpha \quad \therefore \quad \boxed{\ddot{y} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha}$

e $\boxed{\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}\operatorname{sen}\alpha}$

E as forças generalizadas são

$$\lambda = -\frac{1}{2} M \ddot{y} = -\frac{1}{2} M \cdot \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\alpha = \boxed{-\frac{Mg}{3} \operatorname{sen}\alpha}$$

$$\therefore \quad Q_y = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{Mg}{3} \operatorname{sen}\alpha \ \Big\} \text{ força}$$

$$Q_\theta = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{MgR}{3} \operatorname{sen}\alpha \ \Big\} \text{ torque}$$

Ou seja, Q_y e Q_θ são as forças (torque) agindo em $y(\theta)$ p/ manter o disco descendo a rampa sem deslizar. ou seja,

$$\begin{cases} Q_y = \text{força de atrito} \\ Q_\theta = \text{torque do atrito} \end{cases}$$

Note que se tivéssemos usado $\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}$ na lagrangeana, ~~teríamos~~ teríamos:

$$L = \frac{1}{2} M \left(\dot{y}^2 + \frac{\dot{y}^2}{2} \right) - Mg(\ell - y) \operatorname{sen}\alpha$$

cujo resultado em y seria:

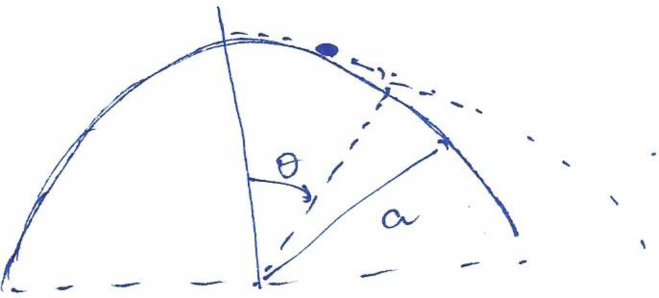
$$\frac{3}{2} M \ddot{y} - Mg \operatorname{sen}\alpha = 0$$

Ou seja, chegaríamos mais rápido ao mesmo resultado mas não teríamos informações sobre as forças de vínculo.

Exemplo 2: Uma partícula de massa m desliza sobre um hemisfério fixo e liso de raio a.

Calcular: a) a força de vínculo

b) o ângulo em que a partícula perde contato com o hemisfério ($v_0 = 0$)



Assumindo o movimento num plano, $\varphi = 0 \Rightarrow$ a velocidade da partícula é: $v^2 = (r\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2$

Assim $$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

e $$U = mgz = mgr\cos\theta$$

O vínculo existe enquanto a partícula está sobre o hemisfério, e nesse caso temos:

$$f(r,\theta) = r - a = 0$$

Assim $$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta$$

e resolvemos p/ θ e r:

$$r: \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= 1 \end{aligned}\right\} mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\ddot{r} + \lambda = 0$$

$$\theta: \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgr\,\text{sen}\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}\right\} mgr\,\text{sen}\theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Aplicando o vínculo $r = a \Rightarrow \dot{r} = 0 \; ; \; \ddot{r} = 0$

$$\therefore \quad \cancel{m} a \dot{\theta}^2 - \cancel{m} g\cos\theta + \frac{\lambda}{m} = 0$$

$$\cancel{m} g a\,\text{sen}\theta - \cancel{m} a^2 \ddot{\theta} = 0$$

$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\,\text{sen}\theta$, USANDO o truque:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad \therefore$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a}\,\text{sen}\theta \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\dot\theta_0}^{\dot\theta} \dot\theta\, d\dot\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g}{a}\,\text{sen}\,\theta\, d\theta = \left.\frac{\dot\theta^2}{2}\right|_{\dot\theta_0}^{\dot\theta} = \left.-\frac{g}{a}\cos\theta\right|_{\theta_0}^{\theta}$$

∴ Se estava no repouso em $\theta_0 = 0 \Rightarrow \dot\theta_0 = 0$ ∴

$$\frac{\dot\theta^2}{2} = \frac{g}{a}(1-\cos\theta) \quad ; \text{ mas}$$

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{\lambda}{ma} = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta)$$

Assim: $$\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{2g}{a} + \frac{2g}{a}\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{am} = \frac{3g}{a}\cos\theta - \frac{2g}{a}} \Rightarrow \lambda = gm(3\cos\theta - 2)$$

ou seja $$Q_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = mg(3\cos\theta - 2)$$

Se $\lambda = 0$ não há contato com o hemisfério ou seja, a partícula sai dele ∴

$$\text{Se } \lambda = 0 \Rightarrow \cos\theta = 2/3 \quad ∴ \quad \boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Note que p/ $\theta = 0$ $Q_r = mg$, como deveria ser! (Força normal!)

Note também que se $\dot{\theta}_0 \neq 0$ temos

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{a}(1-\cos\theta) + \frac{\dot{\theta}_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta) + \dot{\theta}_0^2 = \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{\lambda}{ma}$$

$$\Rightarrow \lambda = mg\cdot(3\cos\theta - 2) - ma\dot{\theta}_0^2$$

e, se $\lambda = 0$ $\therefore$ $3g\cos\theta - 2g - \cancel{m}a\dot{\theta}_0^2 = 0$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3} + \frac{a}{g}\cdot\dot{\theta}_0^2$$

se $\dot{\theta}_0^2 \frac{a}{g} + \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \dot{\theta}_0^2 < \frac{g}{a}\frac{1}{3}$ temos solução

e θ é menor quanto maior $\boxed{|\dot{\theta}_0|}$