Agora que exploramos os conceitos da mecânica Lagrangeana, precisamos traçar paralelos com a mecânica newtoniana.

Obviamente, a Física do problema deve ser a mesma, o que muda é apenas a forma de olhar o problema. Enquanto a mecânica newtoniana enxerga o problema como o resultado da força aplicada (vetor) a mecânica Lagrangeana parte do princípio de que a natureza tenta minimizar as interações, neste caso, a integral temporal de T - U (escalar)

Por se tratar de termos escalares, a Lagrangeana é invariante a mudança de coordenadas, mesmo que essas coordenadas não sejam um conjunto de coordenadas perpendiculares.

Todavia, as duas formas de tratar problemas de mecânica são equivalentes e resultam na mesma dinâmica do sistema estudado.

Por exemplo, se partimos da mecânica Lagrangeana, de sistemas conservativos (que é o que tratamos até o momento), temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

se resolvemos p/ as coordenadas retangulares temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(T-U) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(T-U) = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$$

pois, neste caso, $\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$

ou seja: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$ ↳ sistema conservativo!

Agora, $$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2\right) = m\dot{x}_i = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_i\right) = \boxed{\frac{d}{dt} p_i = F_i}$$

que é exatamente o resultado da mecânica newtoniana.

Outro caminho para mostrar tal equivalência, é partir dos conceitos da mecânica newtoniana para chegar nas equações de Lagrange.

No caso de uma partícula temos que

$$x_i \to x_i(q_j, t) \quad \text{tal que}$$

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Assim, $$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Definindo um <u>momento generalizado</u> como $p_j = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$

e uma <u>força generalizada</u>, considerando o trabalho δW para mudar de δx_i, temos:

$$\delta W = \sum_i F_i\,\delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

definimos $$\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \Rightarrow \delta W = \sum_j Q_j\,\delta q_j$$

Se o sistema é conservativo, $F_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}$

Assim, $$Q_j = \sum_i -\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \boxed{-\frac{\partial U}{\partial q_j}}$$

Assim,

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_i \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 = \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

ou ainda,

$$p_j = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Assim,
$$\dot{p}_j = \sum_i \left(m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m \dot{x}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j dt}$$

Assim:
$$\dot{p}_j = \underbrace{\sum_i m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{Q_j} + \underbrace{\sum_{i,k} m \dot{x}_i \frac{\partial x_i^2}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j dt}}_{\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}}$$

Assim
$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

por fim,
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T = 0$$, mas, como o

sistema é conservativo, $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow$

Assim temos, finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial q_j}(T-U) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\overbrace{(T-U)}^{L} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\overbrace{(T-U)}^{L}\right) = 0$$

Chegamos, então, que $\boxed{\frac{\partial}{\partial q_j} L - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0}$

— · — · —

Vamos lembrar que o tempo é uma grandeza escalar e é homogêneo dentro de um sistema referencial inercial. Com isso, a lagrangeana que descreve um sistema fechado, não interagente com o meio externo, não deve depender explicitamente do tempo, isto é;

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

desta forma, $\frac{d L}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$

Usando que $\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$

↳ equação de Euler-Lagrange

temos: $$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

o ~~seg.~~ termo à direita pode ser escrito como

$$\sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \therefore \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_j\left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$$

ou ainda, $$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{constante no tempo}}\Big) = 0$$

com isso: $$\boxed{L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H = \text{constante}}$$

Agora, olhando com maior detalhe, temos que, se a energia potencial é escrita apenas como função de $x_{\alpha,i} \Rightarrow U(x_{\alpha,i})$ e se a transformada de $x_{\alpha,i}$ para q_j NÃO envolve o tempo (explicitamente), ou seja, Se $\quad x_{\alpha,i} \to x_{\alpha,i}(q_j)$ e $q_j \to q_j(x_{\alpha,i})$

então $$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i\alpha} \frac{\partial U}{\partial x_{i\alpha}} \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \implies U(x_{\alpha,i}) \to U(q_j)$$

com isso, $$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$ de modo que

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = (T-U) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H$$

Mas, se (como assumimos agora) $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$, ou seja sem depender explicitamente de t,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,\alpha} m_\alpha \dot{x}_{i\alpha}^2$$

e $$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \cancel{\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}}^{\,0}$$

assim, $$\dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right)$$

e $$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \cdot \sum_{ijk} \left(\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right)$$

ou seja, podemos escrever a energia cinética como:

$$T = \sum_{j,k} a_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k$$

de modo que $$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{lk}\, \dot{q}_k + \sum_j a_{jl}\, \dot{q}_j$$

multiplicando por $\dot{q}_l$ e somando em l temos

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \underbrace{\sum_k \sum_l a_{lk}\, \dot{q}_k \dot{q}_l}_{} + \underbrace{\sum_{jl} a_{jl}\, \dot{q}_l \dot{q}_j}_{}$$

são iguais! (percebe que j, k, l são índices e podem ser permutados!!!)

ou seja $$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 . \sum_{jk} a_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T$$

Voltando na equação

$$\underbrace{L}_{T-U} - \underbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{2T} = -H = T - U - 2T$$

Assim: $-H = -U - T \Rightarrow \boxed{H = T + U}$

ou seja, a função H chamada HAMILTONIANO torna-se constante e igual a energia, E, do sistema!

Note que, para isso precisamos que:

1) a transformada $x_{\alpha,i} \to q_j$ NÃO depende Explicitamente do tempo, garantindo que $T \to T(\dot{q}_j)$ seja uma função quadrática na velocidade generalizada.

2) a energia potêncial é dependente apenas das coordenadas generalizadas, não de suas velocidades, ou seja, $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$

Note que se E = constante do problema e a escolha da coordenada generalizada não obedece (1) e (2), ainda E é conservada (a física não muda) mas $H \neq E$.

Conservação de Momento Linear:

Vamos escrever a Lagrangeana em coordenadas retangulares: $L = L(x_i; \dot{x}_i)$

No caso da Lagrangeana não depender explicitamente da coordenada x_i, temos que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Neste caso, dizemos que ela é invariante a uma translação de δx_i. Como resultado temos:

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial x_i}}^{\,0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

mas $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[\frac{1}{2}\sum_j m\dot{x}_j^2\right] = m\dot{x}_i = p_i$

portanto, $-\frac{d}{dt}p_i = 0 \quad \therefore \quad \boxed{p_i = \text{constante}}$

ou seja, se a Lagrangeana é invariante com respeito à translação em uma direção, o momento linear do sistema naquela direção é constante no tempo!.

Agora, o que ocorre se a Lagrangeana é invariante em relação à uma rotação por um ângulo $\delta\theta$

Lembramos que uma rotação $\delta\theta$ causa uma mudança na posição $\vec{r}$ dada por:

$$\delta\vec{r} = \delta\hat{\theta} \times \vec{r}$$

e na velocidade:

$$\delta\dot{\vec{r}} = \delta\hat{\theta} \times \dot{\vec{r}}$$

Agora, se a Lagrangeana não muda com $\delta\theta$ temos:

$$\delta L = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i\right] = 0$$

mas, ~~...~~ aprendemos que:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad e \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Assim, $$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0$$

ou

$$\dot{\vec{p}}' \cdot \delta \vec{r}' + \vec{p}' \cdot \delta \dot{\vec{r}}' = 0$$

que pode ser escrito como:

$$\dot{\vec{p}}' \cdot (\delta\hat{\theta} \times \vec{r}') + \vec{p}' \cdot (\delta\theta \times \dot{\vec{r}}') = 0$$

mas $\boxed{\vec{A}' \cdot (\vec{B}' \times \vec{C}')} = \boxed{\vec{B}' \cdot (\vec{C}' \times \vec{A}')} = \vec{C}' \cdot (\vec{A}' \times \vec{B}')$

Assim: $$\delta\hat{\theta} \cdot (\vec{r}' \times \dot{\vec{p}}') + \delta\hat{\theta} \cdot (\dot{\vec{r}}' \times \vec{p}') = 0$$

$$= \delta\hat{\theta} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{r}' \times \vec{p}') = 0 \quad \therefore \quad \vec{r}' \times \vec{p}' = \text{constante}$$

mas $\vec{r}' \times \vec{p}' = \vec{L}'$

ou seja, o momento ângular é constante em relação ao tempo.

Por fim, podemos escrever as leis de conservação de acordo com a mecânica Lagrangeana.

Note que as relações de conservação estão diretamente ligadas às simetrias do problema.

Essas relações, chamadas de Teoremas de Noether podem ser resumidos como:

→ homogeneidade do tempo: A Lagrangeana não depende explicitamente do tempo e a energia total é conservada

→ homogeneidade do espaço: A Lagrangeana é invariante ~~a~~ uma translação e o momento linear naquela direção é conservado.

→ isotropia do espaço: A Lagrangeana é invariante a rotação e o momento angular é conservado.

Vamos ver agora que os teoremas acima são válidos de uma forma mais abrangente se consideramos os chamados "momentos generalizados", definidos analogamente a $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ como:

$$\boxed{p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$$