Continuando com o estudo de forças que dependem da velocidade, vamos ver o caso da força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Mas antes, vamos lembrar um pouco sobre vetores:

Seja $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$

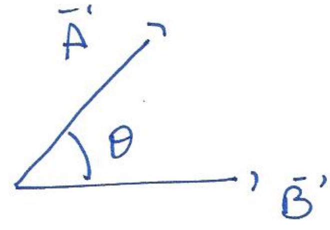
Se $c =$ ~~constante~~ escalar $\Rightarrow$

$$c\vec{A} = cA_x \hat{x} + cA_y \hat{y} + cA_z \hat{z}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} \; \ldots \; = \sum_{i=1}^{3} (A_i + B_i)\,\hat{i}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} A_i^2}$$

Os produtos de vetores são:



Produto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} . \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i . B_i$$

Produto Vetorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

$$= (A_y B_z - B_y A_z)\hat{x} + (B_x A_z - A_x B_z)\hat{y} + (B_y A_x - A_y B_x)\hat{z}$$

e $\vec{A} \times \vec{B}$ é $\perp$ ao plano definido por $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \operatorname{sen}\theta$$

$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{A} =$ zero.

Vamos agora ver como podemos resolver o problema da Força de Lorentz.

Vamos supor uma carga q viajando com $\vec{v}_0$ $(\vec{v}(0) = \vec{v}_0)$ num campo magnético constante $\vec{B} = B_0 \hat{y}$.

Assim,

$$\vec{F}(\vec{v}) = q . \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & B_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= q(-B_0 v_z \hat{x} + B_0 v_x \hat{z})$$

Mas $\vec{F}(\vec{v}) = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow \quad m\dot{v}_x\,\hat{x} + m\dot{v}_y\,\hat{y} + m\dot{v}_z\,\hat{z} = -q.B_0 v_z\,\hat{x} + qB_0 v_x\,\hat{z}$$

Separando os termos:

(I) $m\dot{v}_x = -qB_0 v_z$

(II) $m\dot{v}_y = 0 \longrightarrow v_y = v_{y0} = \text{constante}$

(III) $m\dot{v}_z = qB_0 v_{\cancel{x}}$

Note que as equações (I) e (III) são EDO's acoplados para desacoplá-los, vamos derivar v_z novamente: (III)

$$m\ddot{v}_z = qB_0\dot{v}_x \Rightarrow \dot{v}_{\cancel{x}} = \frac{m}{qB_0}\ddot{v}_z$$

Substituindo em (I) temos:

$$\frac{m^2}{qB_0}\ddot{v}_z = -qB_0 v_z \Rightarrow \boxed{\ddot{v}_z + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 v_z = 0}$$

Chamando $\omega_0 = \dfrac{qB_0}{m}$ temos $\boxed{\ddot{v}_z + \omega_0^2 v_z = 0}$

Cujas soluções são $v_{z_1} = A.\cos\omega_0 t$

$v_{z_2} = B\,\text{sen}\,\omega_0 t$

e $\boxed{v_z = A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t}$

As constantes A e B saem das condições iniciais $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$.

de forma similar, $\boxed{v_x(t) = C \cos\omega_0 t + D \,\text{sen}\,\omega_0 t}$

Assim, sendo $X(t) = X_0 + \int_0^t v_x(t')\,dt'$

temos $X(t) = X_0 + \int_0^t C\cos\omega_0 t' + D\,\text{sen}\,\omega_0 t'\,dt' =$

$$= \boxed{X(t) = X_0 + \frac{C}{\omega_0}\,\text{sen}\,\omega_0 t \pm \frac{D}{\omega_0}\cdot\cos\omega_0 t}$$

similarmente: $\boxed{Z(t) = z_0 \cdot \left(+\frac{A}{\omega_0}\,\text{sen}\,\omega_0 t \pm \frac{B}{\omega_0}\cos\omega_0 t\right)}$

e, de (II) temos que $\boxed{y(t) = y_0 + v_{y_0} t}$

Mas, $\dot{v}_x = -\omega_0 C\,\text{sen}\,\omega_0 t + \omega_0 D\cos\omega_0 t$

$$\dot{v}_z = -\omega_0 A\,\text{sen}\,\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$$

de (I), $\dot{v}_x = -\omega_0 v_z$

(III), $\dot{v}_z = \omega_0 v_x$

Assim: $-\omega_0 C\,\text{sen}\,\omega_0 t + \omega_0 D\cos\omega_0 t = -\omega_0 A\cos\omega_0 t - \omega_0 B\,\text{sen}\,\omega_0 t$

$$-\omega_0 A\,\text{sen}\,\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t = \omega_0 C\cos\omega_0 t + \omega_0 D\,\text{sen}\,\omega_0 t$$

ou seja, $\underline{B = C}$ e $\underline{A = -D}$

de modo que:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \frac{B}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t \\ z(t) = z_0 + \frac{A}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t - \frac{B}{\omega_0}\cos\omega_0 t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t \end{cases}$$

Como $\vec{B} = B_0 \hat{y}$ podemos escrever $\vec{v}_0$ como

$$\vec{v}_0 = \underbrace{v_{0y}\,\hat{y}}_{\hookrightarrow\ //\ \text{campo}} + \underbrace{v_{0z}\,\hat{z}}_{\hookrightarrow\ \perp\ \text{ao campo}}$$

Nesse caso $\boxed{v_{x0} = 0} \Rightarrow$

$$v_{x0} \doteq v_x(0) = C = 0 = B \Rightarrow$$

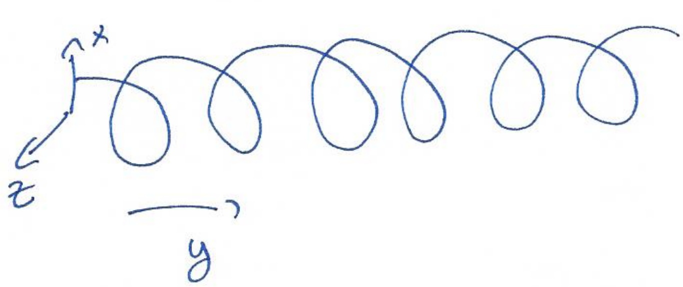
$$x(t) = x_0 + \frac{A}{\omega_0}\cos\omega_0 t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t$$

$$z(t) = z_0 + \frac{A}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t$$

e $v_{z0} = v_z(0) = A \Rightarrow \boxed{A = v_{z0}}$ //

Este movimento é helicoidal:



Note que se $v_{y_0} = 0$

$y = y_0$ e não há movimento na direção do campo e a partícula de carga q moverá segundo:

$$x(t) = v_{z0} \cdot \frac{m}{qB_0} \cdot \cos\left(\frac{qB_0}{m} t\right)$$

$$z(t) = v_{z0} \frac{m}{qB_0} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{qB_0}{m} t\right)$$

Ou seja, move-se em um anel de raio $\boxed{R = \frac{m v_{z0}}{qB_0}}$

Note que quanto maior B_0, menor o raio e quanto maior m maior o R e menor a ω_0 ou seja, mais difícil mudar o movimento $\Rightarrow$ maior a inércia!

Voltando à álgebra ~~[illegible]~~ vetorial, vamos lembrar que

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dA_i}{dt} \hat{x}_i$$

e $$\frac{d(\vec{A} \pm \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$

e são válidas as regras do produto p/

$$\frac{d}{dt}(f \cdot \vec{A}) = \frac{df}{dt}\vec{A} + f \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} \; ; \; \frac{d}{dt}(\vec{A} \overset{\cdot}{\times} \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \overset{\cdot}{\times} \vec{B} + \vec{A} \overset{\cdot}{\times} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Aqui é necessário introduzir o operador gradiente:

$$\vec{\nabla}(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial(\ )}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial(\ )}{\partial z}\hat{z}$$

ou seja, mede o gradiente ("variação") da função em cada uma das direções quando aplicado a um escalar:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Mas este operador pode ser aplicado a um vetor como:

- Produto escalar: Divergente

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Produto vetorial: Rotacional:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Agora, lembrando que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$ e que

$$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z} \Rightarrow \boxed{df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}}$$

Agora, seja $f(x,y,z) \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\hat{z}$$

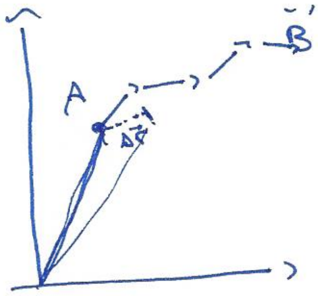
Se $f(x,y,z)$ é uma função contínua e 2x diferenciável

temos que $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Assim $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0}$ → Resultado importante!

TRABALHO

Definimos como o trabalho como



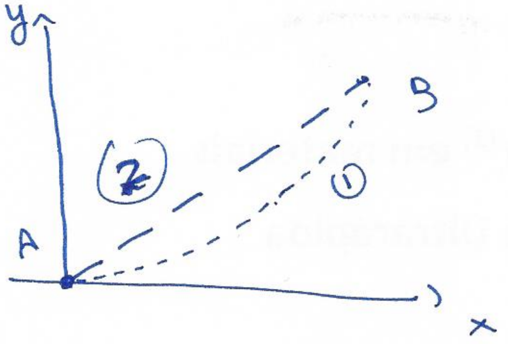
$$W_{A\to B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Onde N é o nº de passos para ir de $A \to B$

quando $\Delta \vec{r} \to 0$ temos

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Note que essa integral depende do caminho, ou seja



caminho 1: $y = ax^2$

caminho 2: $y = bx$

$d\vec{r} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} \Rightarrow$ se $y = bx$ $\quad dy = b\,dx$

$y = ax^2 \quad dy = 2xa\,dx$

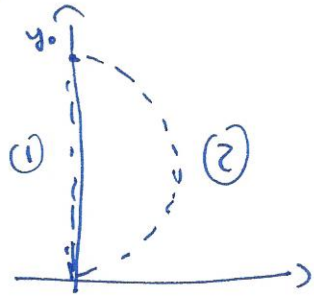
Ou seja, o trabalho p/ uma força levar uma partícula de A p/ B depende do caminho percorrido.

Há casos no qual o trabalho NÃO depende do caminho:

ex: trabalho de $\vec{F} = -mg\,\hat{y}$ p/ levar de $(0,0)$ p/ $(0, y_0)$

2 caminhos: 1) $dx = 0 \Rightarrow d\vec{r} = dy\,\hat{y}$

$$w = \int_0^{y_0} -mg\,dy = -mg\,y_0$$



2) $y^2 + x^2 = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y_0^2}{4} - y^2$

$\therefore 2x\,dx = -2y\,dy \Rightarrow d\vec{r} = -\frac{y}{x}\,dy\,\hat{x} + dy\,\hat{y}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg\,dy \Rightarrow \boxed{W = -mg\,y_0}$

Neste caso temos que

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r} \therefore \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$ Pelo teorema de Stokes

temos: $$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\, da = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$\therefore$ se o trabalho independe do caminho,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

e como acabamos de mostrar, $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0$

$\therefore$ posso escrever essa força como $\vec{F} = \vec{\nabla}f$

onde $f \rightarrow -U$ e $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U}$ e definimos

U como a energia potencial que, para uma força conservativa é definida como:

$$U_2 - U_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

ou seja, $\boxed{\Delta U_{12} = -W_{12}}$ A variação de energia potencial é menos o trabalho realizado pela força.

Só existe U tal que $$U(\vec{r}) - U_0 = -\int_0^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$ se $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$