Sendo $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$ e $\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Podemos escrever que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

Mas, podemos escrever o trabalho realizado por uma $\vec{F}$ em uma partícula como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Mas $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt \Rightarrow dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$

ou ainda, $dW = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ ou ainda, $W_{1 \to 2} = T_2 - T_1$

onde $T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ energia cinética!

portanto, se $\vec{F}(\vec{r})$ é tal que $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$

temos que $W_{1-2} = -(U_2 - U_1) \Rightarrow$

$$W_{1 \to 2} = T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow \underbrace{T_1 + U_1}_{E_1} = \underbrace{T_2 + U_2}_{E_2}$$

ou seja, a energia total é conservada!!!

Neste caso, ~~[illegible]~~ podemos escrever a energia mecânica do sistema como:

$$E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + U(\vec{r})$$

Vamos ver o caso mais simples $\to$ em 1-D

Assim: $\vec{v} \to v_x$ e $\vec{r} \to x$

Assim: $E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - U(x) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

Assim podemos escrever como:

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \Rightarrow$$

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad \therefore$$

Note que o sinal é importante pois dá o sentido do movimento.

Um exemplo simples de como aplicar o método da energia na resolução de problemas de mecânica é o oscilador harmônico simples.

Neste caso, a força é $F(x) = -kx$ ∴

A energia potencial é $U(x) = -\int_{x_0}^{x} (-kx)\,dx$

$$\Rightarrow \quad U(x) - U(x_0) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2} \qquad \text{tomando } U(0)=0$$

temos $U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$ ∴

$$t = \pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}$$

fazendo $\cancel{\text{sen}}\,\alpha = \sqrt{\dfrac{k}{2E}}\, x$ ∴ $\cos\alpha\, d\alpha = \sqrt{\dfrac{k}{2E}}\, dx$

$$\Rightarrow \quad t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \pm\sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\,(\alpha - \alpha_0) \Rightarrow \alpha - \alpha_0 = \pm\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega_0}\, t$$

$$\alpha - \alpha_0 = \pm\omega_0 t \Rightarrow$$

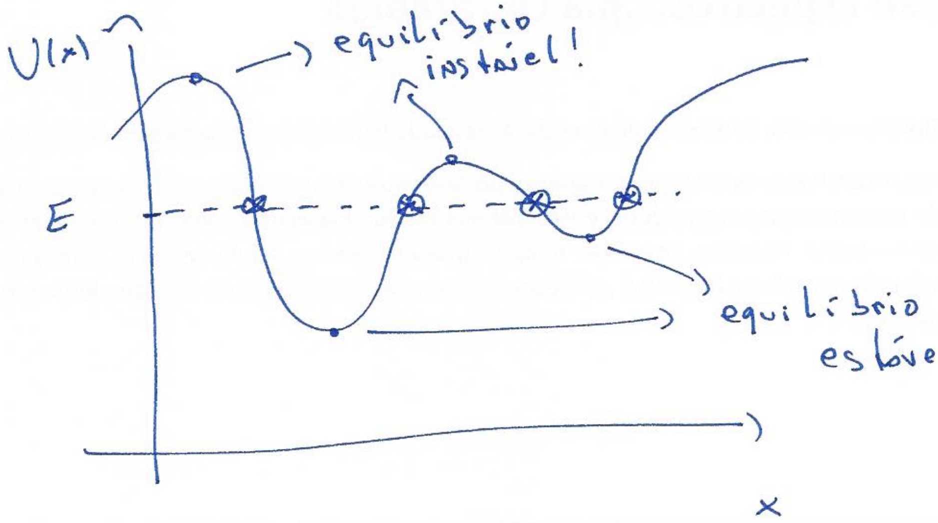
$$\alpha = \pm\omega_0 t + \alpha_0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\pm\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \text{sen}(\pm\omega_0 t + \alpha_0) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cdot \text{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$$

como a função é periódica, temos que $\pm$ pode ser "englobado em uma fase!

Consideremos agora um sistema com forças conservativas $F(x)$ tal que $F(x) = -\frac{dU}{dx}$

Podemos analisar a dinâmica através do gráfico



Os pontos de máximo são chamados de ponto de equilíbrio instável, ou seja, se mover de $x \to x + dx$ o corpo sai do equilíbrio.

Os pontos de mínimo são chamados de equilíbrio estável pois se movermos de x p/ $x + dx$ o corpo volta p/ o ponto de equilíbrio

do curso de Cálculo I sabemos que pontos de equilíbrio são dados por $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$

e, se $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} > 0$ Eq. estável

$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} < 0$ Eq. instável

Se a energia total é E os pontos nos quais $U(x) = E$ são chamados de ponto de retorno. E como $T \geq 0$, esse é o máximo valor que a energia potencial $U(x)$ pode assumir.

Agora, vamos dar um zoom em uma região de x próximo à um ponto de equilíbrio estável x_0

Expandindo em séries:

$$U(x) \simeq U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Se x_0 é um mínimo, temos que $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$

e $$U(x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Como $U(x_0)$ é uma constante, podemos ~~esque~~ considerá-lo nulo (basta uma mudança no referencial de $U(x)$)

ou seja $$U(x) = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2$$

Ou seja, o potencial é o mesmo do oscilador harmônico simples e, para pequenas oscilações em torno de x_0 o problema torna-se

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2\right)$$

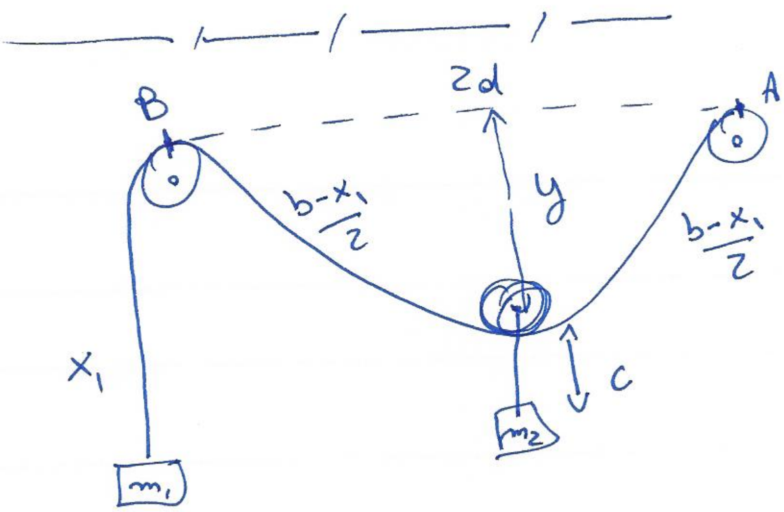
mas $\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} = \text{constante} \quad \therefore \quad \dfrac{d^2U}{dx^2} = k$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}k\frac{d}{dx}(x-x_0)^2 = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \quad \therefore \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}}{m}}$$

↳ freq. de pequenas oscilações.

Exemplo



$$U(x_1) = -m_1 g x_1 - m_2 g \cdot (y + c)$$

como $c = \text{const} \Rightarrow U(x_1) = -m_1 g x_1 - m_2 g \cdot y$

$$y^2 = \left(\frac{b-x_1}{2}\right)^2 - d^2 \Rightarrow y = \sqrt{\left(\frac{b-x_1}{2}\right)^2 - d^2}$$

$$U(x_1) = -g \cdot \left(m_1 x_1 - m_2\sqrt{\frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2}\right)$$

Agora, achar onde $\dfrac{dU}{dx_1} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dU}{dx_1} = -m_1 g + m_2 \cdot \frac{2(b-x_1)}{2\ 4} g \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2}} = 0$$

$$\therefore 4m_1 \cdot \left(\frac{(b-x_0)^2}{4} - d^2 \right)^{1/2} = (b-x_0) \cdot m_2$$

ou $\cancel{16}^{4} m_1^2 \left((b-x_0)^2 - 4d^2 \right) = \cancel{4}(b-x_0)^2 m_2^2$

$$\therefore \cancel{4}(b-x_0)^2 \cdot (4m_1^2 - m_2^2) = 16 m_1^2 d^2$$

$$x_0 = \frac{\pm 4 m_1 d}{(4m_1^2 - m_2^2)^{1/2}} + b$$

Agora, $x_0 < b \Rightarrow$ $\boxed{x_0 = b - \frac{4m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}}$

↳ comprimento da corda

Note que só haverá ponto de equilíbrio se

$$\boxed{m_1 > \frac{m_2}{2}}$$

Para saber se o equilíbrio é estável ou instável basta fazer $\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} \Rightarrow \frac{d^2U}{dx_1^2} = -\frac{m_2 g}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2}} +$

$$+ \frac{m_2 g (b-x_1)^2}{16 \left\{ \frac{(b-x_1)^2}{4} - d^2 \right\}^{3/2}},$$ substituindo $x_1 \to x_0$ temos

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} = \frac{-m_2 g}{4\cdot\left(\frac{16m_1^2d^2}{(4m_1^2-m_2^2)4} - d^2\right)^{1/2}} + \frac{m_2 g\cdot\left(\frac{16m_1^2d^2}{4m_1^2-m_2^2}\right)}{16\left(\frac{16m_1^2d^2}{4(4m_1^2-m_2^2)} - d^2\right)^{3/2}}$$

$$= 2m_2 g\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\cdot\left(\frac{-1}{4\left(16m_1^2d^2 - \cancel{16m_1^2d^2} + 4m_2^2d^2\right)^{1/2}} + \frac{4\cdot m_1^2d^2}{\left(16m_1^2d^2 - \cancel{16m_1^2d^2} + 4m_2^2d^2\right)^{3/2}}\right) =$$

$$= 2m_2 g\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\cdot\left(-\frac{1}{8m_2d} + \frac{4m_1^2d^2}{8m_2^3d^3}\right)$$

$$= \cancel{2}\cancel{m_2}\, g\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\cdot\left(\frac{-m_2^2+4m_1^2}{\cancel{8}m_2^{\cancel{3}\,2}d}\right)$$

$$= \boxed{g\cdot\frac{(4m_1^2-m_2^2)^{3/2}}{4m_2^2d}} > 0 \quad \text{se} \quad m_1 > \frac{m_2}{2}$$

$\therefore$ p/ pequenas oscilações em torno de x_0 temos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{d^2U/dx^2|_{x_0}}{m}}$$

↳ mas quem é $\underline{m}$?

Vamos encontrar $m \rightarrow$ a massa efetiva do problema:

$$(I) \quad m_1 \ddot{x} = + m_1 g - T$$

$$(II) \quad m_2 \ddot{y} = m_2 g - 2T \cdot \frac{2y}{b - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad m_2(\ddot{y} - g) = 4\frac{y}{b-x_1} \cdot m_1(\ddot{x} - g) \quad (III)$$

também $\quad y = \sqrt{\left(\frac{b - \cancel{x}}{2}\right)^2 - d^2} \quad$ e $\quad x_0 = \frac{b - 4m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}$

$$y_0 = \frac{\cancel{4} m_2 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}$$

Tomando o pequeno deslocamento em torno de y_0 e x_0 temos:

$$x = x_0 + \Delta x \qquad \Rightarrow (y_0 + \Delta y)^2 = \frac{(b - x_0 - \Delta x)^2}{4} - d^2$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$\Delta y << y_0 \qquad \Delta x << x_0$

$$= \frac{m_2^2 d^2}{(4m_1^2 - m_2^2)} + \frac{2 \cdot \Delta y \cdot m_2 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}} + \cancel{\Delta y^2} = \frac{4m_1^2 d^2}{4m_1^2 - m_2^2} - \frac{2\Delta x\, m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}} + \cancel{\Delta x^2} - d^2$$

$$= \cancel{\frac{(m_2^2 - 4m_1^2) d^2}{4m_1^2 - m_2^2}} + \frac{2\Delta y\, m_2 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}} = -2\frac{\Delta x\, m_1 d}{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}} \cancel{-d^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta y = -\Delta x \cdot \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\Delta y} = -\Delta\ddot{x}\,\frac{m_1}{m_2}$$

Usando em III temos: $m_2\cdot\left(-\Delta\ddot{x}\frac{m_1}{m_2} - g\right) =$

$$= 4\cdot\frac{y_0+\Delta y}{b-x_0-\Delta x}\cdot m_1\cdot(\Delta\ddot{x}-g)$$

$$= \frac{4\left(\overset{-\Delta x\frac{m_1}{m_2}}{\Delta y} + \frac{m_2 d}{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}\right)}{\frac{4m_1 d}{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}} - \Delta x}\cdot m_1(\Delta\ddot{x}-g)$$

$$= 4\cdot\left[\frac{-\Delta x\frac{m_1}{m_2}\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2} + m_2 d}{4m_1 d - \Delta x\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}\right] m_1(\Delta\ddot{x}-g)$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(m_2 d - \frac{\Delta x}{m_2}m_1\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\right)m_1(\Delta\ddot{x}-g)$$

$$= m_2\left(-\Delta\ddot{x}\frac{m_1}{m_2}-g\right)\cdot\left(4m_1 d - \Delta x\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\right)$$

$$4m_2 m_1 d\Delta\ddot{x} - 4\Delta x\frac{m_1^2}{m_2}\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\,\Delta\ddot{x} + \Delta\ddot{x}\left(4m_1^2 d - \Delta x.m_1\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\right)$$

$$= 4m_1m_2(m_1+m_2)d\,\Delta\ddot{x} - \left[\Delta x.\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\cdot\left(4m_1^2+m_1m_2\right)\right]\Delta\ddot{x} =$$

$$= -\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{3/2} g.\,\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta\ddot{x}\left(4m_1 m_2 (m_1+m_2)\cdot d - \cancel{\Delta x}^{\to 0}\cdot\left(4m_1^2+m_1 m_2\right)\cdot\sqrt{4m_1^2-m_2^2}\right) =$$

$$= -\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{3/2} g\cdot\Delta x$$

mas $d \gg \Delta x \Rightarrow$

$$\Delta\ddot{x} + \underbrace{\frac{\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{3/2}\cdot g}{4m_1 m_2 (m_1+m_2) d}}_{\omega_0^2} \cdot \Delta x = 0$$

$\omega_0^2 \Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{\cancel{g\cdot\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{3/2}}}{\dfrac{\cancel{4}m_2^2\cancel{d}}{m}} = \frac{\cancel{\left(4m_1^2-m_2^2\right)^{3/2} g}}{\cancel{4}m_1 \cancel{m_2}\cdot(m_1+m_2)\cancel{d}}$$

$$\therefore m_2 m = m_1(m_1+m_2) \Rightarrow \boxed{m = \frac{m_1}{m_2}\cdot(m_1+m_2)}$$

massa efetiva do problema!