Equações diferenciais

Nesta parte do curso estamos interessados em resolver equações diferenciais do tipo

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t)$$

O caso mais simples é quando $F(t) = 0$ para isso, a solução se torna homogênea:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Cuja solução é dada por $x(t) = A \cdot e^{pt}$

sendo assim, $\dot{x}(t) = p \cdot Ae^{pt} = p \cdot x(t)$ e

$$\ddot{x}(t) = p^2 A e^{pt} = p^2 x(t)$$

ou seja, a E.D.O. fica

$$a_2 \cdot p^2 x(t) + a_1 p x(t) + a_0 x(t) = 0$$

ou ainda $(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) x(t) = 0$

Como a solução deve ser válida p/ qualquer t temos que

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Cuja solução é

$$p_\pm = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1 - 4a_2 a_0}}{2a}$$

Note que existem dois valores de p que são solução. Portanto temos duas soluções

$$X_+(t) = A e^{p_+ t}$$
$$X_-(t) = B e^{p_- t}$$

Mas, temos que lembrar agora de 2 teoremas:

1) Se $x(t)$ é solução da E.D.O. Homogênea, então $c.x(t)$ onde c = constante também é

2) Se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções da E.D.O. Homogênea, então $x(t) = \underbrace{\alpha . X_1(t) + \beta X_2(t)}_{\text{combinação linear das soluções}}$ também é solução

Assim, a solução geral da E.D.O. é

$$x(t) = A e^{p_+ t} + B e^{p_- t}$$

Todavia, para o caso em que

$a_1^2 = 4 a_2 a_0$ temos que:

$$P_+ = P_- \quad e \quad X_+(t) = X_-(t) . \underline{\text{Constante}}$$

Ou seja, precisamos de mais um termo para satisfazer as condições iniciais.

A solução deste problema deve ser expandida p/ a primeira ordem em "t" ou seja.

Neste caso $P_+ = P_-$

$$X(t) = A . e^{P_+ t} + B . t e^{P_+ t} = e^{P_+ t} (A + Bt)$$

Ou seja, temos 2 casos p/ a solução da EDO homogênea:

$$\text{ou} \begin{cases} X(t) = A e^{P_+ t} + B e^{P_- t} & \text{se } a_1^2 \neq 4 a_2 a_0 \\ X(t) = e^{Pt} (A + Bt) & \text{se } a_1^2 = 4 a_2 a_0 \end{cases}$$

Veremos agora como este problema pode ser aplicado em sistemas com oscilação.

→ Oscilador Harmônico Simples

O caso mais simples de um oscilador Harmônico é quando não há amortecimento ou alguma força externa.

Neste caso, a única força que atua no sistema é: $F(x) = -kx$ (em 1-D)

e a equação da lei de Newton é escrita:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\Rightarrow$ sendo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ temos que $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Neste caso, $a_2 = 1$; $a_0 = \omega_0^2$ e $a_1 = 0$.

$$P_\pm = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4\omega_0^2}}{2} = \pm \omega_0 i$$

Note que a solução p/ P é puramente imaginária

de modo que

$$x(t) = Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}$$

Mas $x(t)$ é uma distância real $\therefore$

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow$$

$$Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t} = A^* e^{i\omega_0 t} + B^* e^{-i\omega_0 t}$$

$\therefore$ $\boxed{A = B^*}$ e $x(t) = Ae^{-i\omega_0 t} + A^* e^{i\omega_0 t}$

A equação acima pode também ser escrita como

$$X(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \operatorname{sen} \omega_0 t$$

de fato, dadas as condições iniciais, v_0 e X_0

temos $X(0) = \alpha = X_0$

e $v(t) = \dot{X}(t) = -\omega_0 \alpha \operatorname{sen}\omega_0 t + \omega_0 \beta \cos \omega_0 t$

$v(0) = \omega_0 \beta = v_0 \quad \therefore \quad \beta = \dfrac{v_0}{\omega_0}$

e $\boxed{X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \dfrac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t}$

lembrando que $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

tomando $\cos \theta = \dfrac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}}$ e $\operatorname{sen} \theta = -\dfrac{\dfrac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{X_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}}$

temos $X(t) = \sqrt{X_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cdot \left(\cos \omega_0 t \cos \theta - \operatorname{sen}\omega_0 t \operatorname{sen} \theta\right)$

e $\boxed{X(t) = \sqrt{X_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)}$

θ é uma fase e depende das condições iniciais!

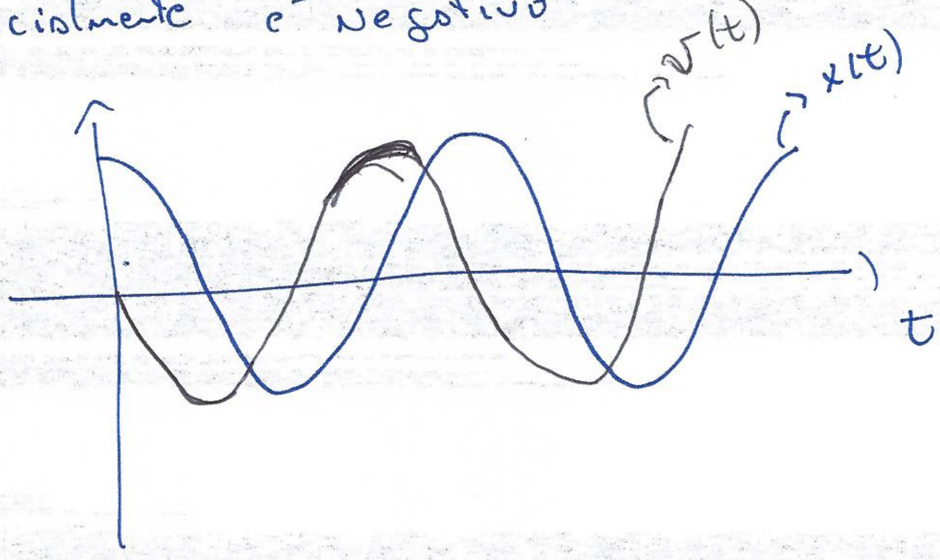
daí sai imediato que

$$v(t) = -\omega_0 . \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cdot \text{sen}(\omega_0 t + \theta)$$

$$v(t) = -\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2} \ \text{sen}(\omega_0 t - \theta)$$

Note que se $x_0 = +\cancel{x_0} > 0$ e $v_0 = 0$

$v(t)$ inicialmente é negativo



De forma geral, o oscilador harmônico pode

ser em 3-D $\Rightarrow$ $\vec{F}(\vec{r}) = -\mathbb{K}\,\vec{r}$

onde $\mathbb{K}$ é um tensor $\Rightarrow$ $m\ddot{\vec{r}} = \mathbb{K}\,\vec{r}$

que, para uma dada energia potencial $U(\vec{r})$ temos

$$\boxed{k_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}}$$

O caso mais geral foge do escopo deste curso! Vamos aqui dar o exemplo de oscilações nas quais os eixos são desacoplados

Assim $k_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $k_{ii} = k_i$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y)$$

$$z(t) = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z) \qquad \omega_i^2 = \frac{k_i}{m}$$

Note que são 6 as condições iniciais necessárias no problema.

No caso 2D em que a força é isotrópica temos $k_x = k_y = k \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$ e

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

e $x(t) = A_x \cos(\omega_0 t + \theta_x)$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_0 t + \theta_y)$$

Para escrevermos o caminho $y(x)$

temos que

$$y(t) = A_y \cdot \cos[\omega_0 t - \theta_x + \overbrace{\underbrace{\theta_x - \theta_y}}^{\delta}]$$

↳ diferença de fase entre x e y

$$\Rightarrow y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_0 t - \theta_x + \delta) =$$

$$= A_y(\cos(\omega_0 t - \theta_x)\cos\delta - \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta_x)\operatorname{sen}\delta)$$

ou seja,

$$y(x) = \frac{A_y}{A_x} \cdot x\cos\delta - \frac{A_y}{A_x} \cdot (A_x^2 - x^2)^{1/2} \cdot \operatorname{sen}\delta$$

Vamos ver alguns casos específicos:

Se $\delta = 0 \Rightarrow \cos\delta = 1$ e $\operatorname{sen}\delta = 0 \therefore$

$$y(x) = \frac{A_y}{A_x} \cdot x \rightarrow \text{reta}$$

Se $\delta = \pm\pi \Rightarrow \cos\delta = -1$ e $\operatorname{sen}\delta = 0$

$$y(x) = -\frac{A_y}{A_x} \cdot x \rightarrow \text{reta}$$

Se $\delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\delta = 0$ e $\operatorname{sen}\delta = 1$

$$\frac{y^2}{A_y^2} + \frac{x^2}{A_x^2} = 1 \rightarrow \text{elipse.}$$

Agora,

se $\omega_x \neq \omega_y$ temos que se

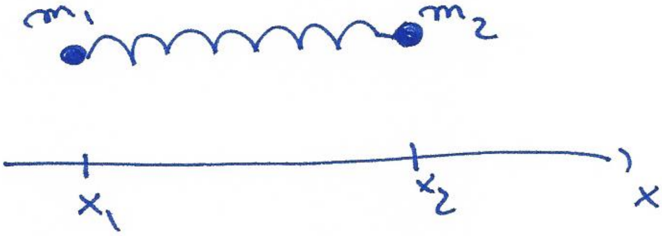
$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{\omega_x}{\omega_y} \qquad \text{onde } n_i = \text{inteiro}$$

a massa vai percorrer um caminho fechado.

Caso contrário serão caminhos abertos ~~que~~

Essas curvas são as curvas de Lissajous!

Exemplo:



mola relaxada $\Rightarrow l = l_0$

$$m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - l_0) \qquad (I)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) \qquad (II)$$

Notem que são 2 equações acopladas, mas podemos resolver se igualarmos: $(I) = -(II) \Rightarrow$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_2 \ddot{x}_2 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = 0$$

Assim, definindo $X = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$ centro de massa.

e $M = m_1 + m_2 \Rightarrow$

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = 0$$

ou seja, o centro de massa do sistema está movendo com $V =$ constante.

Agora, se fizermos (II) - (I) temos

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - l_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - l_0)$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu}} k.\,(x_2 - x_1 - l_0) \Rightarrow$$

Chamando $x = x_2 - x_1 - l_0 \Rightarrow \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \dfrac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2}$

Assim

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{\mu} x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{\mu} . x = 0$$

$$x(t) = A . \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\therefore \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Se $V_{cm} = 0 \Rightarrow X_{cm} =$ const $\Rightarrow$ temos que

$$x_1 + x_2 = X_{cm}$$

$$x_1 - x_2 - l_0 = A . \cos(\omega_0 t + \theta) \Rightarrow x_1 = \frac{x_{cm} + l_0}{2} + \frac{A}{2}\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$x_2 = \frac{x_{cm} - l_0}{2} - \frac{A}{2}\cos(\omega_0 t + \theta)$$