

Oscilador Harmônico Amortecido (50)

Neste caso existe um atrito que amortece o movimento e essa força é proporcional à velocidade do corpo.
desta forma escrevemos:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

↳ termo de amortecimento.

ou seja, $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$

cujas soluções são do tipo

$$x(t) = A e^{p_+ t} + B e^{p_- t} \quad \text{onde}$$

$$p_{\pm} = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Vamos chamar $\frac{b}{2m} = \gamma$ e $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

Assim $p_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Podemos escrever a solução geral como

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

Assim, podemos separar a solução em 3 casos dependendo do valor de γ e ω_0 .

ou seja:

→ se $\gamma < \omega_0$ chamamos de amortecimento fraco pois b é pequeno

→ se $\gamma > \omega_0$ chamamos de amortecimento forte pois b é grande

→ se $\gamma = \omega_0$ estamos na situação de amortecimento crítico.

Vamos agora olhar p/ cada caso: ~~ex~~

1) Sub Amortecido = amortecimento fraco $\omega_0 > \gamma$

Neste caso, o termo $(\gamma^2 - \omega_0^2) < 0$ e sua raiz torna-se um número imaginário

Assim, vamos definir uma nova frequência ω dada

por $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \therefore$ a solução torna-se

$$x(t) = e^{-\gamma t} \cdot [A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}]$$

Como visto na aula passada, a solução acima pode ser escrita como.

$$x(t) = C \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

(52)

Ou seja, o resultado é uma combinação de uma oscilação com frequência $\underline{\omega}$ e uma queda exponencial com tempo de resposta de $\boxed{\tau = 1/\gamma}$

Note que a frequência de oscilação é $\underline{\omega}$ e NÃO $\underline{\omega_0}$ além disso $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$, ou seja, demora mais para completar um período! o que era de se esperar se consideramos que o amortecimento "atrasa" o movimento.

No caso de $\gamma < \omega_0$, a energia mecânica total do sistema decresce com o tempo $\tau_E = 1/2\gamma$

Vejam os: se ~~$\gamma < \omega_0$~~ $\gamma < \omega_0$
 $\omega \rightarrow \omega_0$

$$x(t) \approx A e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t$$

$$v(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t - \omega_0 A e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t$$

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2 \omega_0 t$$

$$+ \frac{1}{2} m \left[\gamma^2 A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2 \omega_0 t + \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \sin^2 \omega_0 t + 2\gamma \omega_0 A^2 e^{-2\gamma t} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \right] =$$

(53)

$$= \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \left[\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t + \frac{\cancel{\gamma^2}^0}{\omega_0^2} \cos^2 \omega_0 t + \right. \\ \left. - \frac{2\cancel{\gamma}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \right]$$

$\gamma < \omega_0$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \quad \therefore$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2\tau}}$$

2) Se $\gamma > \omega_0 \Rightarrow$ caso super amortecido ou amortecimento forte.

Neste caso, as soluções são reais e dados por.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \gamma_2 &= \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ \gamma_2 &= \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}} \right\} \text{ reais e } > 0$$

$$X(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

Note que os dois termos decaem exponencialmente e sem oscilar.

$$\text{Neste caso, } \dot{X}(t) = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

No caso de $X(0) = 0$ temos
 $V(0) = V_0 \neq 0$

$$C_1 = -C_2$$

$$\text{e } -\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_1 = V_0 \quad \therefore C_1 = \frac{V_0}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

e, note que $\gamma_1 > \gamma > \gamma_2$

Nesta situação, se temos as condições iniciais tais que $C_1 = 0 \Rightarrow x(t) = C_2 e^{-\gamma_2 t}$ e o $x(t) \rightarrow 0$ mais lentamente que no caso do amortecimento crítico.

Note também que, se $x(0) = 0$ e $C_1 = -C_2$

$$\text{temos: } x(t) = \frac{V_0}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})$$

Mas $e^{-\gamma_1 t} < e^{-\gamma_2 t} \quad \therefore x(t) < 0$ sempre se $V(0) < 0$ e $x(t) > 0$ sempre se $V(0) > 0 \Rightarrow$ NÃO CORTA O EIXO $x(t) = 0$.

3) Amortecimento crítico. $\Rightarrow \omega_0 = \gamma$

Neste caso, a solução geral será

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$$

Ex:

Lei de indução de Lenz $\rightarrow$ criando uma corrente de Foucault que "segua um ímã" e mantenha o movimento $\Rightarrow$ Vamos ver o vídeo.

Exemplo 2:

Achar a solução geral p/ um sistema com amortecimento forte e $x_0, v_0 \neq 0$.

considerando que $x_0 < 0$, pode $x(t) > 0$?

$$\gamma^2 > \omega_0^2$$

x_0 e v_0

Solução geral:
$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t}$$
$$\dot{x}(t) = -\gamma_1 C_1 e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 C_2 e^{-\gamma_2 t}$$

Considerando as condições iniciais

$$x(0) = x_0 = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0 - C_2$$

$$v(0) = v_0 = -\gamma_1 C_1 - \gamma_2 C_2$$

$$\text{e } v_0 = -\gamma_1 (x_0 - C_2) - \gamma_2 C_2 \quad \therefore \quad C_2 (\gamma_1 - \gamma_2) = v_0 + \gamma_1 x_0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{v_0 + \gamma_1 x_0}{\gamma_1 - \gamma_2}}$$

$$\text{e } \boxed{C_1 = - \frac{\gamma_2 x_0 + v_0}{\gamma_1 - \gamma_2}}$$

$$\therefore \boxed{x(t) = -\left(\frac{r_2 x_0 + v_0}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_1 t} + \left(\frac{v_0 + r_1 x_0}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_2 t}} \quad (56)$$

$$\dot{x}(t) = r_1 \left(\frac{r_2 x_0 + v_0}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_1 t} - r_2 \left(\frac{v_0 + r_1 x_0}{r_1 - r_2}\right) e^{-r_2 t}$$

P/ saber se $x(t)$ ~~cruza~~ cruza o zero temos:

$$x(t) = 0 \Rightarrow \frac{r_2 x_0 + v_0}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t} = \frac{v_0 + r_1 x_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t}$$

$$(r_2 x_0 + v_0) e^{-r_1 t} = (v_0 + r_1 x_0) e^{-r_2 t}$$

$$\therefore e^{(r_1 - r_2)t} = \frac{r_2 x_0 + v_0}{v_0 + r_1 x_0} \quad \therefore$$

$$\therefore (r_1 - r_2) \cdot t = \ln \left[\frac{v_0 + r_2 x_0}{v_0 + r_1 x_0} \right] \quad \text{mas } r_1 > r_2$$

Se x_0 e $v_0 > 0$ NAO há solução

Se x_0 e $v_0 < 0$ NAO há solução

Se $x_0 < 0$ e $v_0 > 0 \Rightarrow$ Se $v_0 > r_1 x_0 \Rightarrow x$ cruza

zero em $t = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \ln \left[\frac{v_0 + r_2 x_0}{v_0 + r_1 x_0} \right] > 0$

(57)

Ex: 3 $\Rightarrow$ faz o mesmo p/ o caso
geral do amortecimento crítico.

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma C_1 e^{-\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} - \gamma C_2 t e^{-\gamma t}$$

Se $x(0) = x_0 = 0$ $C_1 = x_0$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\gamma C_1 + C_2 = 0$$

$$\boxed{C_2 = v_0 + \gamma x_0} \quad \therefore x(t) = x_0 e^{-\gamma t} + (v_0 + \gamma x_0) t e^{-\gamma t}$$

Agora se $x(t) = 0$ temos

$$x_0 e^{-\gamma t} = - (v_0 + \gamma x_0) t e^{-\gamma t}$$

$$\therefore t = -\frac{x_0}{(v_0 + \gamma x_0)} \Rightarrow \text{se } x_0 < 0 \text{ e } |v_0| > |\gamma x_0|$$

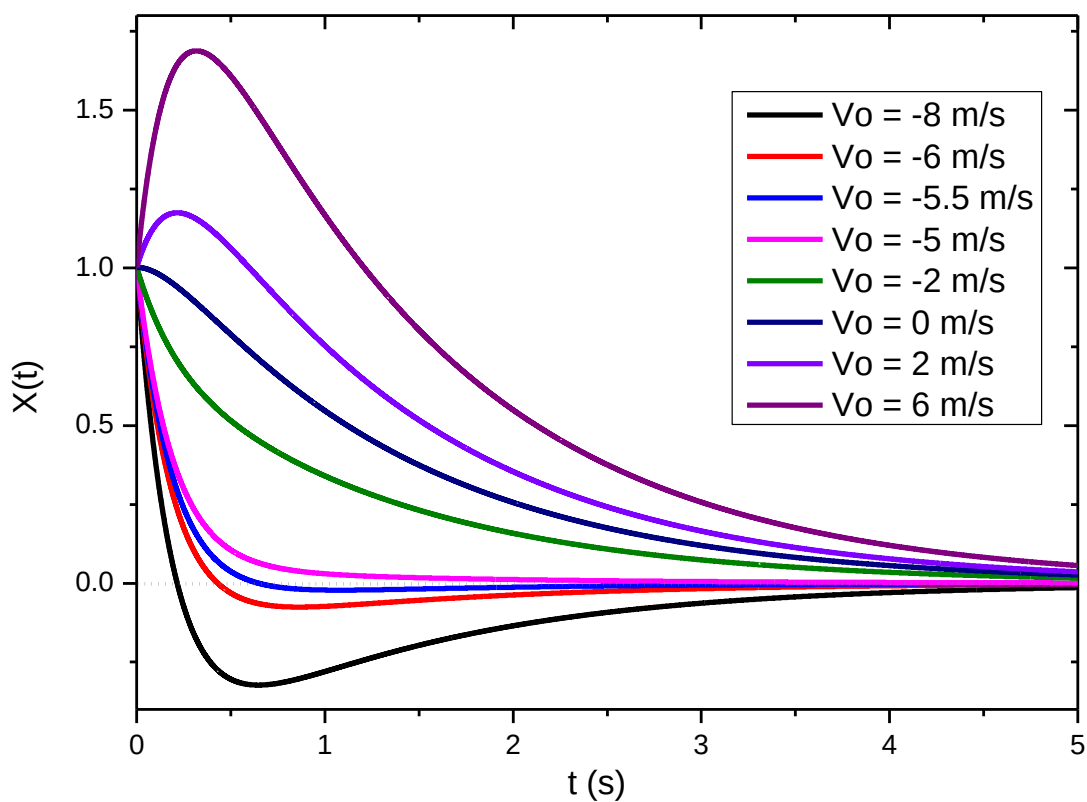
$$\Rightarrow t > 0 \text{ e temos } \boxed{t_c}$$

Exemplos de $x(t)$ para o oscilador harmônico superamortecido com:

$$X(0) = 1 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = 3 \text{ rad/s}$$



Note que se v_0 é menor que $-5,5 \text{ m/s}$, o sistema cruza $x = 0$.

Se a velocidade inicial é positiva, este sistema nunca cruza $x = 0$.

Note também que quanto menor é v_0 , mais rápido o sistema cruza o zero.