Fator de Qualidade

Vamos voltar ao caso do oscilador subamortecido e calcular quanto de energia é dissipada por oscilação

A energia mecânica é dada por

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

e $\quad x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \theta) \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

$$\dot{x}(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \theta) - \omega_1 A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega_1 t - \theta)$$

Assim $\quad E = \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_1 t - \theta) + \frac{1}{2} m \Big(\gamma^2 A^2 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_1 t - \theta)$

$$+ 2\gamma\omega A^2 e^{-2\gamma t} \operatorname{sen}(\omega_1 t - \theta)\cos(\omega_1 t - \theta) + \omega_1^2 A^2 e^{-2\gamma t} \operatorname{sen}^2(\omega_1 t - \theta)\Big)$$

Se $\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \quad \omega_1 \sim \omega_0$ e

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \cdot e^{-2\gamma t}}$$

Nessas condições $\quad \frac{dE}{dt} = -2\gamma \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t}$

$$= -\gamma m A^2 \omega_0^2 e^{-2\gamma t}$$

$$\Delta E = E_T - E_0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \left(e^{-2\gamma \frac{2\pi}{\omega_0}} - 1 \right)$$

Mas $e^{-4\pi \frac{\gamma}{\omega_0}} \simeq 1 - \frac{4\pi \gamma}{\omega_0} \Rightarrow$

$$\Delta E \simeq - \frac{4\pi \gamma}{\omega_0} \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2$$

Sendo $E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{\Delta E}{E_0} = -\frac{4\pi \gamma}{\omega_0}}_{\text{fração de energia perdida por oscilação!!}}$

Definimos então, a quantidade Q = fator de qualidade de um oscilador!

$$Q \equiv \left| \frac{2\pi}{\frac{\Delta E}{E}} \right| \Rightarrow$$ para o caso onde $\gamma \ll \omega_0$, temos

$$\boxed{Q \equiv \frac{\omega_0}{2\gamma}}$$

No caso de termos um oscilador forçado, substituímos $\omega_0 \rightarrow \omega_R$ de modo que

$$Q \doteq \frac{\omega_R}{2\gamma}$$

Ou seja, o fator de qualidade de um oscilador forçado é igual à razão entre sua frequência de ressonância e sua largura de linha, 2γ.

Em um oscilador forçado, a força externa fornece uma energia p/ o oscilador. A energia fornecida pa tempo é a potência fornecida ao oscilador pela força externa.

Ou seja, seja uma força F_{ext} aplicada a um oscilador, o trabalho realizado por esta força é dado por:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$$

ou ainda, $dW = F\,dx \Rightarrow$ lembrando que $dx = v\,dt$ temos:

$$dW = Fv\,dt \quad \therefore$$

$$\frac{dW}{dt} = F.v = \text{Potência!}$$

No caso de uma força do tipo

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x}_p(t) = \frac{-\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

$\therefore$ se estamos já no estado estacionário $x_{t}(t) \to 0$

temos $P(t) = \dfrac{-\omega F_0^2 m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$

Sendo $\operatorname{sen}(\omega t - \delta) = \operatorname{sen}\omega t \cos\delta - \cos\omega t \operatorname{sen}\delta$

$$P(t) = \frac{-\omega F_0^2/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \left[\cos(\omega t)(\operatorname{sen}\omega t \cos\delta) - \cos^2\omega t \operatorname{sen}\delta\right]$$

$$\therefore \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\, dt = \boxed{\frac{\omega F_0^2/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}\delta}$$

Lembrando que $\operatorname{sen}\delta = \dfrac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{P} = \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}$$

Por fim note que o trabalho feito pela força externa é a energia mecânica transferida p/ o sistema.

Por exemplo:

Seja um oscilador harmônico amortecido com γ e ω_0 e forçado com $F(t) = F_0 e^{-\beta t}$, a força externa tende à zero p/ $t \to \infty$

portanto:

$$x_p(t) = A e^{-\beta t} \Rightarrow \dot{x}_p(t) = -\beta A e^{-\beta t}$$

$$\ddot{x}_p(t) = \beta^2 A e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \beta^2 A \cancel{e^{-\beta t}} + 2\gamma(-\beta A)\cancel{e^{-\beta t}} + \omega_0^2 A \cancel{e^{-\beta t}} = \frac{F_0}{m}\cancel{e^{-\beta t}}$$

$$\therefore A \cdot (\beta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\beta) = \frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m(\beta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\beta)}} \Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0/m}{(\beta^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\beta)} e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Note que tanto $x_h(t)$ quanto $x_p(t) \to 0$
$\dot{x}_h(t)$ quanto $\dot{x}_p(t) \to 0$ $\Big\}$ $t \to \infty$

Seja $x_0 \neq 0$ e $v_0 = 0$, a energia total inicial do sistema é

$$E = \frac{1}{2} k x_0^2 + \cancel{\frac{1}{2} m v_0^2}^{\to 0} = \boxed{\frac{1}{2} k x_0^2}$$

Além disso, a energia mecânica total do sistema p/ $t \to \infty$ é

$$E = \frac{1}{2} k \underbrace{x(t\to\infty)^2}_{0} + \frac{1}{2} m \underbrace{v(t\to\infty)^2}_{0} = 0$$

E o trabalho realizado pela força externa é

$$W_{ext} = \int_{0}^{\infty} F_{ext}\, dx = \int_0^{\infty} F_{ext} \cdot v\, dt$$

ou seja, a energia total dissipada no meio viscoso é

$$\boxed{W_{vis} = \int_0^{\infty} -bv \cdot v\, dt = \int_0^{\infty} F_{ext}\, v\, dt + E_0}$$