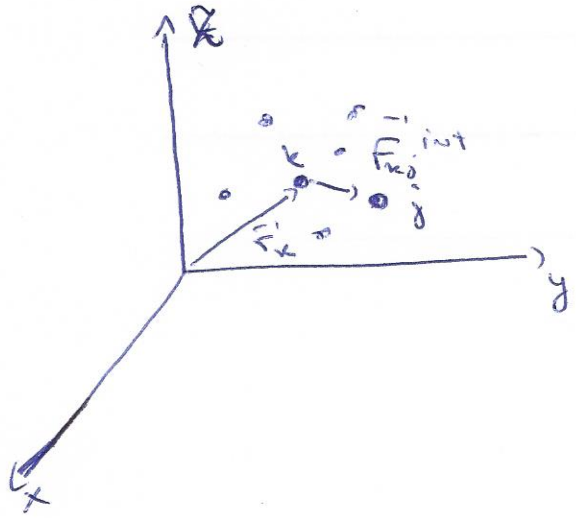
Sistema de Partículas

Vamos considerar um sistema formado por N partículas interagentes, sendo que a k-ésima partícula tem massa m_k e encontra-se na posição $\vec{r}_k$. O movimento desta k-ésima partícula é descrito por:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{\sum_j \vec{F}^{int}_{jk}}_{\text{Força interna}} + \vec{F}^{ext}_k$$

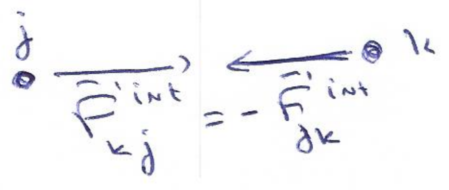
→ Forças externas.

↳ soma de todas as forças agindo sobre k devido às demais massas m_j do sistema



Agora, vamos lembrar da terceira Lei de Newton em sua "forma fraca":

$$\boxed{\vec{F}^{int}_{jk} = -\vec{F}^{int}_{kj}}$$



Com isso em mente, podemos observar o que ocorre com o sistema todo somando sobre as partículas $\underline{\underline{k}}$

$$\sum_k m_k \ddot{\vec{r}}_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \vec{p}_k\right) = \sum_k \vec{F}_k^{ext} + \sum_k \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk}^{int}$$

Agora, o último termo pode ser reescrito como

$$\sum_k \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk}^{int} = \sum_k \sum_{j > k} \underbrace{\left(\vec{F}_{jk}^{int} + \vec{F}_{kj}^{int} \right)}_{\vec{F}_{jk}^{int} = -\vec{F}_{kj}^{int}}$$

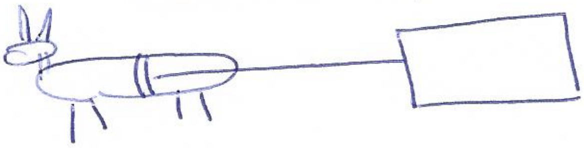
ou seja, $\sum_k \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk}^{int} = 0$ e,

Chamando $\vec{P} = \sum_k \vec{p}_k$ e $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$

temos $\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{P}) = \vec{F}}$

Ou seja, a variação do momento linear de um sistema é igual à força EXTERNA aplicada a este sistema.

Lembrando do exemplo do burrinho e carroça lá do começo do curso



Podemos enxergar o problema de duas formas:

1) O sistema é Burro + Carroça: Nesse caso, a força de atrito da terra é uma força externa e o sistema tem $\frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0$

2) O sistema é Burro + Carroça + Terra: Assim temos só forças internas dois que

$$\vec{F}_{BT} = -\vec{F}_{TB}$$
$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$$
$$\vec{F}_{CT} = -\vec{F}_{TC}$$

e o momento total do sistema é $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

ou seja, a mesma mudança de momento experimentada pelo Burro + Carroça é a que "ocorre" na terra!

Uma forma mais elegante e, por fim, mais útil de descrever estes problemas é através do centro de massa definido por:

$$\boxed{\sum_k m_k \vec{r}_k = M.\vec{R}} \quad \therefore$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \cdot \sum_k m_k \vec{r}_k}$$

onde

$$\boxed{M = \sum_k m_k}$$

Assim, temos que

$$\vec{P} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = M\dot{\vec{R}}$$

e

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

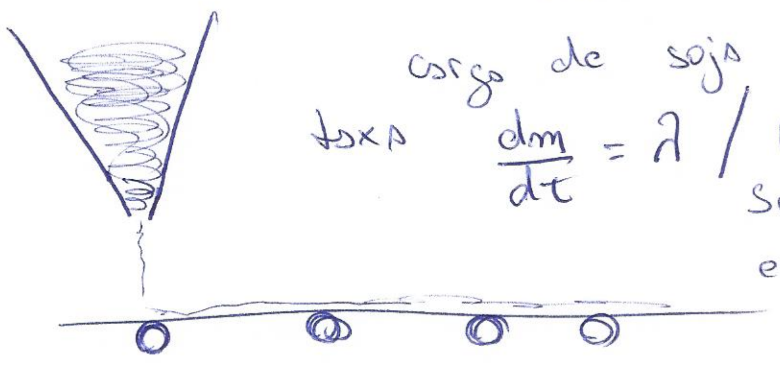
ou seja, o <u>momento</u> <u>Linear</u> do centro de massa é constante se $\vec{F} = 0$

Por fim, o sistema de Partículas é dinamicamente equivalente a uma massa $M = \sum_k m_k$ localizada na posição do centro de massa do sistema, $\vec{R}$

Exemplo do teorema da conservação do momento Linear:

esteira de massa M

carga de soja cai na esteira com taxa $\frac{dm}{dt} = \lambda$ / Qual a força que deve ser feita p/ que a esteira tenha v const.?



O sistema é composto por esteira (M) mais a soja que cai (m)

portanto, em um dado momento o momento (73)
linear do sistema é

$$P = (m+M)\,v$$

Note que nesse caso o sistema não é "isolado"
e massa é adicionada ao sistema com $\frac{dm}{dt} = \lambda$

Assim: $\frac{dP}{dt} = F_{ext} = \frac{d}{dt}(m+M)v = \frac{dm}{dt}v + (m+M)\frac{dv}{dt}$

Agora, se queremos que a velocidade da esteira
seja constante $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$ e a força apli-
cada deve ser: $F = \frac{dm}{dt}.v = \lambda v$

Agora, o trabalho realizado pela essa força
externa é
$$dW = F\,dx = F\,v\,dt \quad \therefore$$

a taxa de trabalho, ou a potência é

$$\frac{dW}{dt} = F.v = \lambda v^2 = \left(\frac{dm}{dt}\right)v^2$$

Sendo v = constante, podemos escrever:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(mv^2)$$

~~A~~ Olhando a variação de energia $\overset{\text{mecânica}}{\text{do}}$ sistema temos

$$E = \cancel{K}T + U \Rightarrow U \text{ constante! } \therefore$$

$$\Delta E = \Delta K \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((m+M)v^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(mv^2) + \cancel{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Mv^2)}^{0} \quad \therefore$$

A variação da energia mecânica do sistema é

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dW_{ext}}{dt}$$

O que aconteceu com a outra parte da energia transferida pela força?