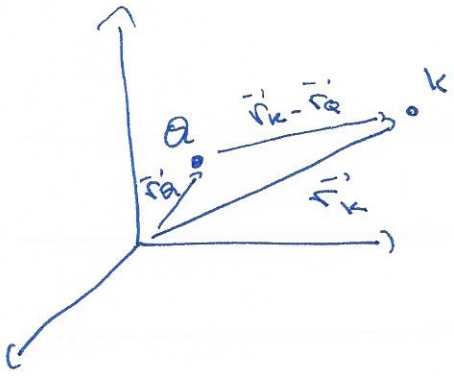
Vamos agora definir o momento angular de uma partícula movendo-se em relação à um ponto:



$$\therefore \quad \vec{L}_{kQ} \equiv m_k(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$$

↳ momento angular da partícula "k" em relação a ~~uma~~ ponto Q.

Vamos agora, considerar um sistema de partículas como temos tratado. Neste caso temos que o momento angular do sistema, em torno de Q é

$$\vec{L}_Q = \sum_k \vec{L}_{kQ} = \sum_k m_k(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$$

Agora, para analisar como $\vec{L}_Q$ varia com o tempo fazemos:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_k \frac{d\vec{L}_{kQ}}{dt} = \sum_k m_k(\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q) \times (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q)$$

$$+ \sum_k m_k(\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\ddot{\vec{r}}_k - \ddot{\vec{r}}_Q)$$

O primeiro termo é nulo pois $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

O segundo termo pode ser escrito como:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_k m_k \left[(\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \ddot{\vec{r}}_k' \right] - \underbrace{\sum_k m_k (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q')}_{M\vec{R}'} \times \ddot{\vec{r}}_Q'$$

$$= \sum_k m_k \left[(\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \ddot{\vec{r}}_k' \right] - M(\vec{R}' - \vec{r}_Q') \times \ddot{\vec{r}}_Q'$$

Se o ponto de referência "Q" NÃO acelera, logo $\ddot{\vec{r}}_Q' = 0$ ou se a aceleração é // à $\vec{R}' - \vec{r}_Q'$

temos $M(\vec{R}' - \vec{r}_Q') \times \ddot{\vec{r}}_Q' = 0$

e $$\frac{d\vec{L}_Q'}{dt} = \sum_k m_k (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \ddot{\vec{r}}_k' = \sum_k (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times m_k \ddot{\vec{r}}_k'$$

Agora, Lembremos que $m_k \ddot{\vec{r}}_k' = \vec{F}_k^{ext} + \sum_j \vec{F}_{jk}^{int}$

$$\frac{d\vec{L}_Q'}{dt} = \sum_k (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \vec{F}_k^{ext} + \sum_{kj} (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \vec{F}_{jk}^{int}$$

O segundo termo torna-se

$$\sum_{kj} (\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \vec{F}_{jk}^{int} = \sum_k \sum_{j=1}^{k-1} \left[(\vec{r}_k' - \vec{r}_Q') \times \vec{F}_{jk}'^{int} + (\vec{r}_j' - \vec{r}_Q') \times \vec{F}_{kj}'^{int} \right]$$

mas $\vec{F}_{jk}'^{int} = -\vec{F}_{kj}'^{int} \Rightarrow$ $$= \sum_k \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{r}_k' - \vec{r}_j') \times \vec{F}_{jk}'^{int}$$

Considerando que $\vec{F}_{ij}^{int}$ é na direção de i-j

ou seja, $\vec{r}_k - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{jk}^{int} \Rightarrow \sum_k \sum_{l=1}^{k-1} (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{jk}^{int} = 0$

e $$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{e}$$

definimos o torque $\vec{\tau}_k$ da partícula k em relação ao ponto Q devido à força externa $\vec{F}_k^{ext}$ como:

$$\vec{\tau}_{kQ} = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k^{e} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_k \vec{\tau}_{kQ}$$

ou $$\vec{\tau}_Q = \sum_k \vec{\tau}_{kQ} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{\tau}_Q}$$

ou seja, o momento angular de um sistema só muda através da aplicação de uma força externa que gere <u>torque</u>.

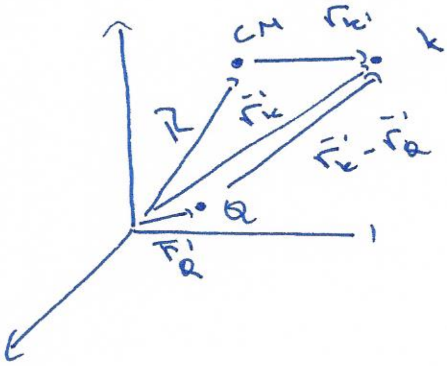
Por fim, se o torque em relação à algum eixo é nulo, o momento angular em relação à esse eixo é constante

Para o caso do momento linear ~~[illegible]~~ temos que o momento linear do sistema é dado por

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

Para o momento angular podemos escrever:

$$\vec{L}'_Q = \sum_k m_k (\vec{r}'_k - \vec{r}'_Q) \times (\dot{\vec{r}}'_k - \dot{\vec{r}}'_Q)$$



definindo $\vec{R}'_Q$ como a posição do C.M. em relação à Q:

$$\vec{R}'_Q = \vec{R}' - \vec{r}'_Q \quad \text{e}$$

$$\vec{r}'_{k'} = \vec{r}'_k - \vec{R}'$$

temos:

$$\vec{r}'_k - \vec{r}'_Q = \vec{R}'_Q + \vec{r}'_{k'}$$

$$\dot{\vec{r}}'_k - \dot{\vec{r}}'_Q = \dot{\vec{R}}'_Q + \dot{\vec{r}}'_{k'}$$

$$\therefore \vec{L}'_Q = \sum_k m_k (\vec{R}'_Q + \vec{r}'_{k'}) \times (\dot{\vec{R}}'_Q + \dot{\vec{r}}'_{k'}) =$$

$$= \sum_k \vec{R}'_Q \times \underbrace{(m_k \dot{\vec{R}}'_Q)}_{M \dot{\vec{R}}'_Q} + \sum_k m_k (\vec{R}'_Q \times \dot{\vec{r}}'_{k'} + \vec{r}'_{k'} \times \dot{\vec{R}}'_Q)$$

$$+ \sum_k \vec{r}'_{k'} \times \underbrace{(m_k \dot{\vec{r}}'_{k'})}_{\vec{p}'_k}$$

$$\boxed{\vec{L}'_Q = \vec{R}'_Q \times \vec{P}'_Q + \sum_k \vec{r}'_{k'} \times \vec{p}'_{k'}}$$

e o segundo termo se anula pois

$$\sum_k m_k \vec{r}'_{k'} = \sum_k [m_k (\vec{r}'_k - \vec{R}')] = M\vec{R}' - M\vec{R}' = 0$$

ou seja, o momento angular do sistema em relação ao ponto Q é o momento angular do centro de massa em relação à Q MAIS o momento angular de cada partícula k em relação ao C.M.

Conservação de energia p/ um sistema de partículas:

O trabalho da força agindo em k para levá-lo de 1 para 2 é dado por:

$$W_{1\to 2,k} = \int_1^2 \vec{F}_k' \cdot d\vec{r}_k'$$

desta forma, o trabalho total para mover o sistema é

$$W_{1-2} = \sum_k \int_1^2 \vec{F}_k' \cdot d\vec{r}_k'$$

Vamos escrever: $\vec{F}' \cdot d\vec{r}' = m \dfrac{d\vec{v}'}{dt} \cdot \vec{v}' dt$

e, definindo $u = \vec{v}' \cdot \vec{v}' \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \vec{v}' \cdot \dfrac{d\vec{v}'}{dt} + \dfrac{d\vec{v}'}{dt} \cdot \vec{v}' = 2\dfrac{d\vec{v}'}{dt} \cdot \vec{v}'$

$$\therefore \quad \vec{F}' \cdot d\vec{r}' = \frac{m}{2} \frac{d(\vec{v}' \cdot \vec{v}')}{dt} dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) dt$$

ou ainda, $\vec{F}' \cdot d\vec{r}' = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$

desta forma $\vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = d\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right)$

ou $W_{1\to 2} = \sum_k \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \left[\sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2\right]\Big|_1^2$

$$= \sum_k T_k \Big|_1^2 = \sum_k \left[T_{2k} - T_{1k}\right] = T_2 - T_1$$

Usando que $\vec{r}_k = \vec{r}_{k'} + \vec{R} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_{k'} + \dot{\vec{R}}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \cdot \left(\dot{\vec{r}}_{k'} + \dot{\vec{R}}\right) \cdot \left(\dot{\vec{r}}_k + \dot{\vec{R}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_k m_k \dot{r}_{k'}^2 + \overbrace{\sum_k m_k}^{M} \dot{R}^2 + 2 \cdot \underbrace{\left[\sum_k m_k \dot{\vec{r}}_{k'}\right]}_{0} \cdot \dot{\vec{R}}\right]$$

$$\therefore \quad T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{r}_{k'}^2$$

A energia cinética total é a soma da energia cinética do C.M. e do movimento relativo de cada partícula do sistema em relação ao C.M.

Voltando ao $W_{1\to 2}$, vamos escrever

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{ext} + \vec{F}_k^{int}$$

$$\hookrightarrow = \sum_j \vec{F}_{jk}^{int}$$

$$W_{12} = \sum_k \int_1^2 \vec{F}_k^{e} \cdot d\vec{r}_k + \sum_k \sum_j \int_1^2 \vec{F}_{jk}^{int} \cdot d\vec{r}_k$$

Se $\vec{F}_k^{int}$ e $\vec{F}_k^{ext}$ são conservativas, temos

$$\vec{F}_k^{ext} = -\vec{\nabla}_k U_k$$

$$\vec{F}_{jk}^{int} = -\vec{\nabla}_k U_{jk}$$

↳ energia potencial de j em k.

$$\sum_k \int_1^2 \vec{F}_k^{ext} \cdot d\vec{r}_k = -\sum_k \int_1^2 \vec{\nabla}_k U_k \cdot d\vec{r}_k = -\sum_k U_k \Big|_1^2$$

$$= -\sum_k (U_{k_2} - U_{k_1})$$

e

$$\sum_k \sum_j \int_1^2 \vec{F}_{jk}^{int} \cdot d\vec{r}_k = \sum_k \sum_{j<k} \left(\vec{F}_{jk}^{int} \cdot dr_k + \vec{F}_{kj}^{int} \cdot d\vec{r}_j \right)$$

$$= \sum_k \sum_{j<k} \left(\vec{F}_{jk}^{int} \cdot (d\vec{r}_k - d\vec{r}_j) \right)$$

Chamando $d\vec{r}_{jk} = d\vec{r}_k - d\vec{r}_j$ ∴

$$U_{kj} = U_{k,j}(\vec{r}_k, \vec{r}_j)$$

e

$$dU_{kj} = \left(\frac{\partial U_{kj}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U_{kj}}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U_{kj}}{\partial z_k} dz_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U_{kj}}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial U_{kj}}{\partial y_j} dy_j + \frac{\partial U_{kj}}{\partial z_j} dz_j \right)$$ ou

ainda $$dU_{kj} = \vec{\nabla}_k U_{kj} \cdot d\vec{r}_k + \vec{\nabla}_j U_{kj} \cdot d\vec{r}_j$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_k U_{kj} = -\vec{F}_{jk}^{int}$$

$$\vec{\nabla}_j U_{kj} = -\vec{F}_{kj}^{int} = \vec{F}_{jk}^{int}$$

$$\therefore \quad dU_{kj} = -\vec{F}_{jk}^{int} \cdot (d\vec{r}_k - d\vec{r}_j)$$ e

$$\sum_k \sum_{j<k} \int_1^2 \vec{F}_{jk} \cdot (d\vec{r}_k - d\vec{r}_j) = -\sum_k \sum_{j<k} \int_1^2 dU_{kj} = -\sum_k \sum_{j<k} U_{kj} \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow \text{ definimos } \quad U = \sum_k U_k + \underbrace{\sum_k \sum_{j<k} U_{kj}}$$

Note que existe a energia potencial interna do sistema

e $$W_{12} = -(U_2 - U_1) = T_2 - T_1$$

$$\therefore \quad \boxed{T_2 + U_2 = T_1 + U_1}$$

Então, se $\vec{F}^{ext}$ e $\vec{F}^{int}$ são conservativas, a energia mecânica do sistema é conservada

Num corpo rígido a energia potencial interna é constante, ou seja $U_{kj} = const.$

E se a força externa não for conservativa:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_k \vec{F}_k^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_k$$

Em resumo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_k \vec{F}_k^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{ext} = \sum_k \vec{\tau}_k$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_k \vec{F}_k^{ext} \cdot \dot{\vec{r}}_k$$