~~Desta~~ Definindo momento generalizado por

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

temos, da equação de Euler-Lagrange que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} p_j = 0 \quad \therefore \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Assim, a equação que definimos para o Hamiltoniano, H:

$$-H = L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

, pode ser reescrito por:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$$

Lembremos que $L = L(q_k, \dot{q}_k; t)$

mas, um dado $\dot{q}_k$ pode ser expresso em termos das coordenadas e momentos generalizados, ou seja:

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_i, p_i; t)$$

de modo que:

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k; t)$$

Note que o Hamiltoniano é SEMPRE escrito como função das coordenadas e momentos generalizados, enquanto que a Lagrangeana é dada em termos das coordenadas e velocidades generalizadas.

Ou seja, para ir da Lagrangeana p/ o Hamiltoniano, deve ser feita a transformação

$$(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow (q_j, p_j, t)$$

pois

$$\boxed{L = L(q_j, \dot{q}_j; t)} \quad e \quad \boxed{H = H(q_j, p_j; t)}$$

desta forma, se definimos H e L como acima, o diferencial ~~temporal~~ total de H é:

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Mas, usando $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_j, \dot{q}_i, t)$

temos:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Agora, lembrando que $\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}$ e $\boxed{\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}}$

temos $dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + \cancel{p_k d\dot{q}_k} - \dot{p}_k dq_k - \cancel{p_k d\dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$$= \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

e isso é igual também a

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

portanto, podemos identificar cada um dos termos de forma independente, resultando em:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ -\dot{p}_k &= \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}}$$

Equações de Hamilton do movimento

Note que 1 equação de Lagrange (segunda ordem) vira 2 equações de Hamilton (1ª ordem)

e $$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Um resultado importante é que usando as equações de Hamilton, temos

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\sum_k \left(\overbrace{\frac{\partial H}{\partial p_k}}^{\dot{q}_k} \dot{p}_k + \overbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}^{-\dot{p}_k} \dot{q}_k \right)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

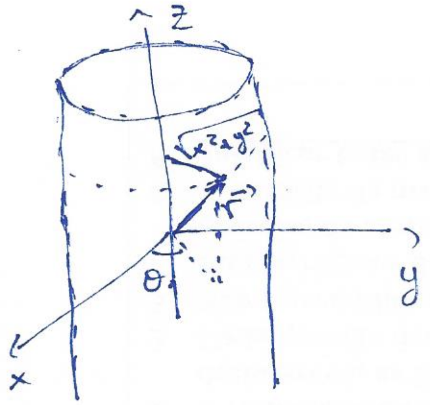
$$\therefore \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

Outro resultado imediato das equações de Hamilton é que, se q_K não aparece explicitamente no Hamiltoniano, ∴

$$\frac{\partial H}{\partial q_K} = 0 = -\dot{P}_K \quad \therefore \quad P_K \text{ é constante do problema!}$$

Neste caso, q_K é uma coordenada cíclica!

<u>Exemplo 1</u>: Achar as equações do movimento de uma partícula de massa <u>m</u> que move-se na superfície de um cilindro $(x^2+y^2=R^2)$, sujeita a força central $\vec{F} = -k\vec{r}$



Seja $\vec{F} = -k\vec{r}$ ∴

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

como está na superfície do cilindro,

$$x^2+y^2 = R^2 \quad \therefore \quad U = \frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

Assim: $$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

e o problema é resolvido p/ θ e z ∴

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

Vamos achar os momentos generalizados:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad \therefore \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \therefore \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

podemos calcular o Hamiltoniano aplicando

$$H = p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - L$$

$$= \frac{p_\theta^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}m.\left(R^2.\frac{p_\theta^2}{m^2R^4} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}k(R^2+z^2)$$

$$\boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(R^2+z^2) = T + U}$$

Note que como $U = U(q_j)$ e $x_i \to x_i(q_j)$, temos que H é simplesmente a energia do sistema!

Com isso, temos

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \therefore \quad p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{constante}$$

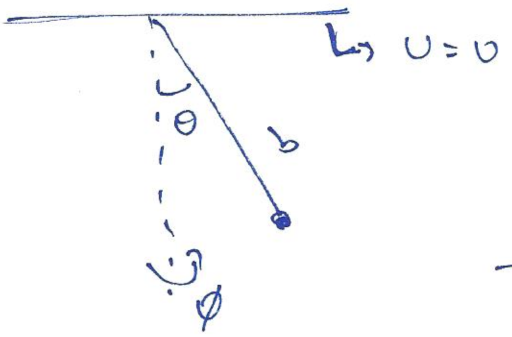
$$\dot{p}_z = m\ddot{z} \Rightarrow$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz$$

$$m\ddot{z} = -kz \quad \therefore$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Exemplo 2: Usar o método do Hamiltoniano p/ achar as equações do movimento de um pendulo esférico de massa m e comprimento b.



como b é fixo, temos que:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)$$

mas

$$x = b \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad \dot{x} = b\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$y = b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad \therefore \quad \dot{y} = b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\theta} + b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$z = -b\cos\theta \qquad \dot{z} = b\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

Assim

$$T = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m b^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2$$

$$U = mgz = -mgb\cos\theta$$

Assim

$$L = \frac{1}{2} m b^2 \left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2 \right) + mgb\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m b^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}$$

Novamente, note que $U = U(\theta)$ e $x, y, z \rightarrow \theta, \varphi$ não depende explicitamente do tempo. Com isso $H = T + U$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mb^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{mb^2 \operatorname{sen}^2\theta} - mgb\cos\theta}$$

↳ note que trocamos $\dot{\theta} \to p_\theta$ p/ escrever o
$\dot{\varphi} \to p_\varphi$ Hamiltoniano

P/ resolver as equações do movimento, note que φ não aparece no Hamiltoniano, portanto

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = mb^2 \operatorname{sen}^2\theta \, \dot{\varphi} = \text{constante}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mb^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2}$$

Note que essas duas são as mesmas que já havíamos resolvido.

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mb^2 \operatorname{sen}^3\theta} - mgb \operatorname{sen}\theta$$

como $p_\theta = \dot{\theta} mb^2 \therefore \dot{p}_\theta = mb^2\ddot{\theta} \Rightarrow$

$$mb^2\ddot{\theta} = \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mb^2 \operatorname{sen}^3\theta} - mgb \operatorname{sen}\theta$$ onde p_φ = constante

se $p_\varphi = 0$, temos: $\cancel{m}b^2\ddot{\theta} = -\cancel{m}gb \operatorname{sen}\theta \therefore$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{b}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \text{pêndulo simples!}$$