Como revisão vamos resolver 3 exemplos:

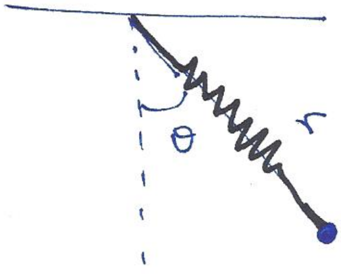
Exemplo 1: Um pêndulo é composto por uma mola sem massa e de constante elástica k, comprimento relaxado l! Uma massa puntual m é colocada no seu extremo. A mola pode contrair e estender no plano mas não pode dobrar.

a) Escreva a Lagrangeana do sistema e as equações de movimento.

b) encontre os momentos conjugados

c) Escreva a Hamiltoniana do sistema e as 4 equações de Hamilton

d) A energia mecânica é conservada? Justifique!!



$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \therefore \qquad \dot{x} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$y = -r\cos\theta \qquad\qquad \dot{y} = -\dot{r}\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Agora, U tem 2 componentes: gravitacional e elástica

$$U = mgy + \frac{k\Delta l^2}{2} \qquad \text{mas} \qquad \Delta l = \cancel{x} - \cancel{l}$$

$$y = -r\cos\theta$$

$$U = -mgr\cos\theta + \frac{k}{2}(r-l)^2$$

por tanto:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) + mgr\cos\theta - \frac{k}{2}(r-l)^2$$

As equações de movimento são:

r: $$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

Assim: $$\boxed{mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-l) - m\ddot{r} = 0}$$

θ: $$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \therefore \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

Assim: $$\cancel{m}g\cancel{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\cancel{m}\cancel{r}\dot{r}\dot{\theta} + \cancel{m}r^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = 0$$

$$\boxed{g\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0}$$

b) $$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \therefore \qquad \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

c) como $x, y \to r, \theta$ NÃO depende explicitamente de t, e como $U = U(r,\theta)$, temos que $H = E = T + U$

$$\therefore \quad H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l)^2$$

Note que H é escrito em termos de $\underline{p_r}$ e $\underline{p_\theta}$

Assim, as equações de Hamilton tornam-se:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = mg\cos\theta - k(r-l) + \frac{\cancel{2}p_\theta^2}{\cancel{2}mr^3}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

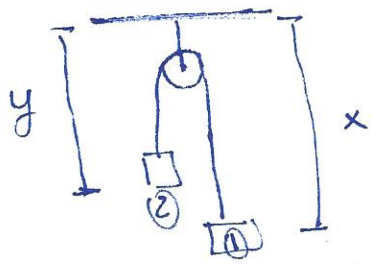
Note que as 4 equações acima equivalem às equações de Lagrange no item (a)

d) Sabemos que $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$, como L não depende explicitamente de t, temos $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \therefore \frac{dH}{dt} = 0$ e, como $H = E$, temos que a energia se conserva!

Exemplo 2: Considere uma máquina de Atwood ideal com uma corda de comprimento L e duas massas, m_1 e m_2, sob ação da gravidade. Calcule:

a) A aceleração de cada bloco

b) A força de vínculo. Qual o significado físico dela?



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$$

$$U = - m_1 g x - m_2 g y$$

equação de vínculo: $f(x,y) = x + y - L = 0$

com isso $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + m_1 g x + m_2 g y$

x: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = m_1 g \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \end{cases}$

com isso temos:

$$m_1 g - m_1 \ddot{x} + \lambda = 0$$

y: $\frac{\partial L}{\partial y} = m_2 g \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_2 \dot{y}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ com isso temos

$$m_2 g - m_2 \ddot{y} + \lambda = 0$$

da equação de vínculo temos que

$$\ddot{x} = -\ddot{y}$$

por fim, temos 3 equações e três incógnitas:

$$m_1 g - m_1 \ddot{x} + \lambda = 0$$

$$m_2 g - m_2 \ddot{y} + \lambda = 0$$

$$\ddot{x} = -\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -m_1 g + m_1 \ddot{x} = -m_2 g - m_2 \ddot{x} \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2) g \Rightarrow \ddot{x} = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2}$$

consequentemente,

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2}}$$

b) A ~~eq.~~ força que mantém o vínculo é:

$$Q_x = \lambda . \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda = Q_y = -m_1 g + m_1 . \ddot{x}$$

$$Q_x = Q_y = \left[\frac{\cancel{-m_1^2} - m_1 m_2 + \cancel{m_1^2} - m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right] g$$

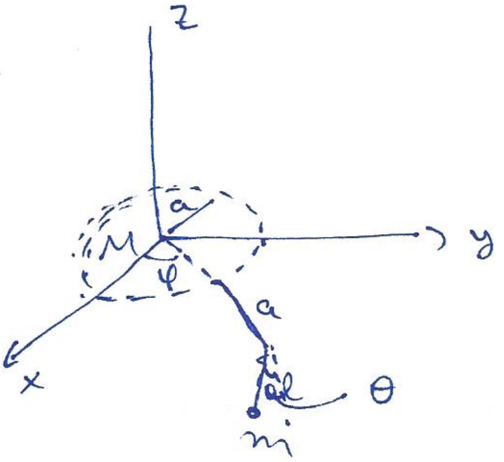
$$Q_x = Q_y = -\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$ = tensão na corda.

Exemplo 3: Um disco de raio a e massa M gira horizontalmente em torno e z que passa pelo seu centro. Um bastão de massa desprezível e comprimento a é preso horizontalmente na borda do anel em uma linha que passa pelo centro do anel. Na outra ponta do bastão é preso um pêndulo com comprimento l e massa m (oscila no plano definido pelo eixo z e pelo bastão)

a) Encontre a Lagrangeana do sistema

b) os momentos conjugados

c) Encontre as quantias dinâmicas que são conservadas e discuta.



Vamos 1º encontrar T e U

$$U = mgz$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{I_{disco}\dot{\varphi}^2}{2}$$

Agora: $z = -l\cos\theta$

$$I_{disco} = \frac{Ma^2}{2}$$

$$x = (2a + l\,\mathrm{sen}\theta)\cos\varphi$$

$$y = (2a + l\,\mathrm{sen}\theta)\,\mathrm{sen}\varphi$$

portanto, temos 2 coordenadas generalizadas, θ e φ

$$\dot{z} = l\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{x} = -(2a + l\,\mathrm{sen}\theta)\,\mathrm{sen}\varphi\,\dot{\varphi} + l\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = (2a + l\,\mathrm{sen}\theta)\cos\varphi\,\dot{\varphi} + l\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\dot{\theta}$$

Assim $U = -mgl\cos\theta$

$$T = \frac{1}{2}m\left((2a + l\,\text{sen}\,\theta)^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2$$

Assim,

$$L = \frac{1}{2}m\left((2a + l\,\text{sen}\,\theta)^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\theta$$

b) com isso, temos que determinar p_θ e p_φ

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}^2$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m(2a + l\,\text{sen}\,\theta)^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}$$

c) Note que $U = U(\theta)$ e que $x, y, z \to \theta, \varphi$ NÃO depende explicitamente do tempo, portanto $H = T + U = E$

Assim

$$H = \frac{1}{2}m\left[(2a + l\,\text{sen}\,\theta)^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\theta$$

Agora, note que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \therefore \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ e $\frac{dH}{dt} = 0$

ou seja, a energia mecânica é conservada!

Além disso, note que H NÃO depende de φ

Assim

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \therefore \quad p_\varphi = \text{constante}.$$

Ou seja: $p_\varphi = \left[m(2a + l\,\text{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2}Ma^2\right]\dot{\varphi} = \text{constante}.$

Conservação do momento angular L_z pois a única força agindo no sistema é $\vec{F} = -mg\hat{z}$ $\therefore$ $L_z = \text{constante}!$

THE END!

:)