FI255 - Tópicos de Óptica e Fotônica II

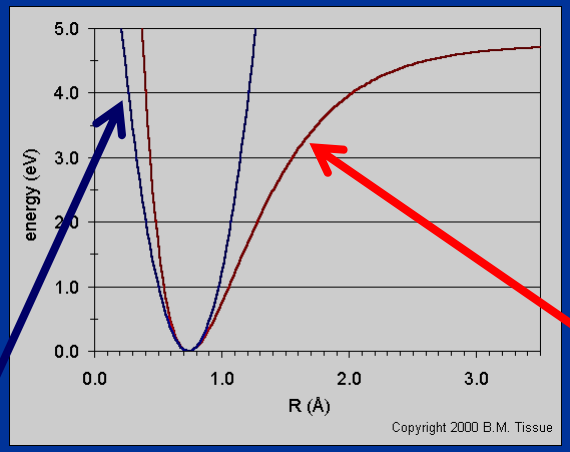
Óptica Não-Linear

3ª. aula

Prof. Cid B. de Araújo
UNICAMP - 16 de março de 2018

Breve revisão da 2ª. Aula

Átomo como um oscilador – muito abaixo do limite de ionização



REVISÃO

Oscilador harmônico

Oscilador anarmônico

Energia potencial do elétron

$$U(x) = \frac{1}{2} m_0 \omega_0 x^2 + \cancel{\frac{1}{3} m_0 K_a x^3 + \frac{1}{4} m_0 K_b x^4} + \cdots \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_0}}$$

Força restauradora:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -m_0 \omega_0^2 x - \cancel{m_0 K_a x^2} + \cdots$$

Átomo como oscilador clássico

REVISÃO

Modelo uni-dimensional

$$F = m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx}$$

$$U = \frac{1}{2} m_0 \omega_0 x^2$$

Força de "dissipação" = $-\gamma \frac{dx}{dt}$

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = -m_0 \omega_0 x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

REVISÃO

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + m_0\omega_0 x = 0$$

Força externa devida ao campo óptico:

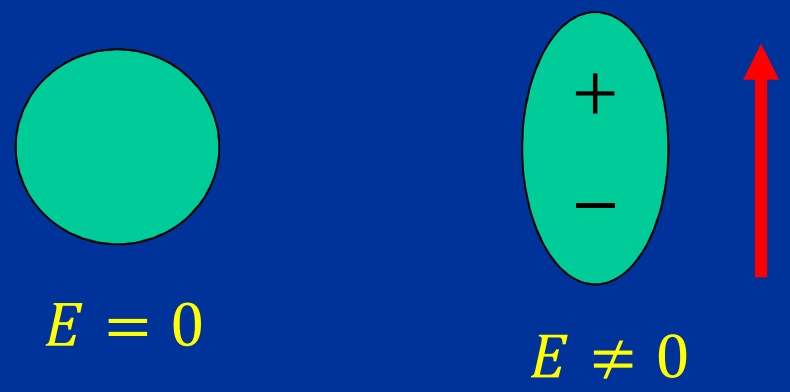
$$F_{elet} = -eE(t)$$

$$\boxed{m_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + m_0\omega_0 x = -eE(t)}$$

$$\mathrm{E}(t) = E_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} E_0 \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$x(\omega, t) = \frac{1}{2}\left(X e^{i\omega t} + c.c\right) \qquad X = -\frac{eE_0}{m_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

REVISÃO



Momento de dipolo induzido $\quad p(\omega, t) = -ex(\omega, t)$

Polarização $\quad P(\omega, t) = -Nex(\omega, t)$

N é o número de dipolos por unidade de volume

REVISÃO

$$P_R = -\frac{Ne^2}{2m_0}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega}E_0$$

$$P = P_{NR} + P_R$$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E + P_R$$

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$$

$$\epsilon_r = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{2m_0}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\gamma\omega}E_0$$

REVISÃO

$$\epsilon_1(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\epsilon_2(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

$\tilde{n} = n_0 + i\kappa$ $\alpha_0 = 2\kappa\omega/c$ $\tilde{n}^2 = \epsilon_1 + i\,\epsilon_2$

$$n_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2}\right\}^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2}\right\}^{1/2}$$

Lorentz oscillators

REVISÃO

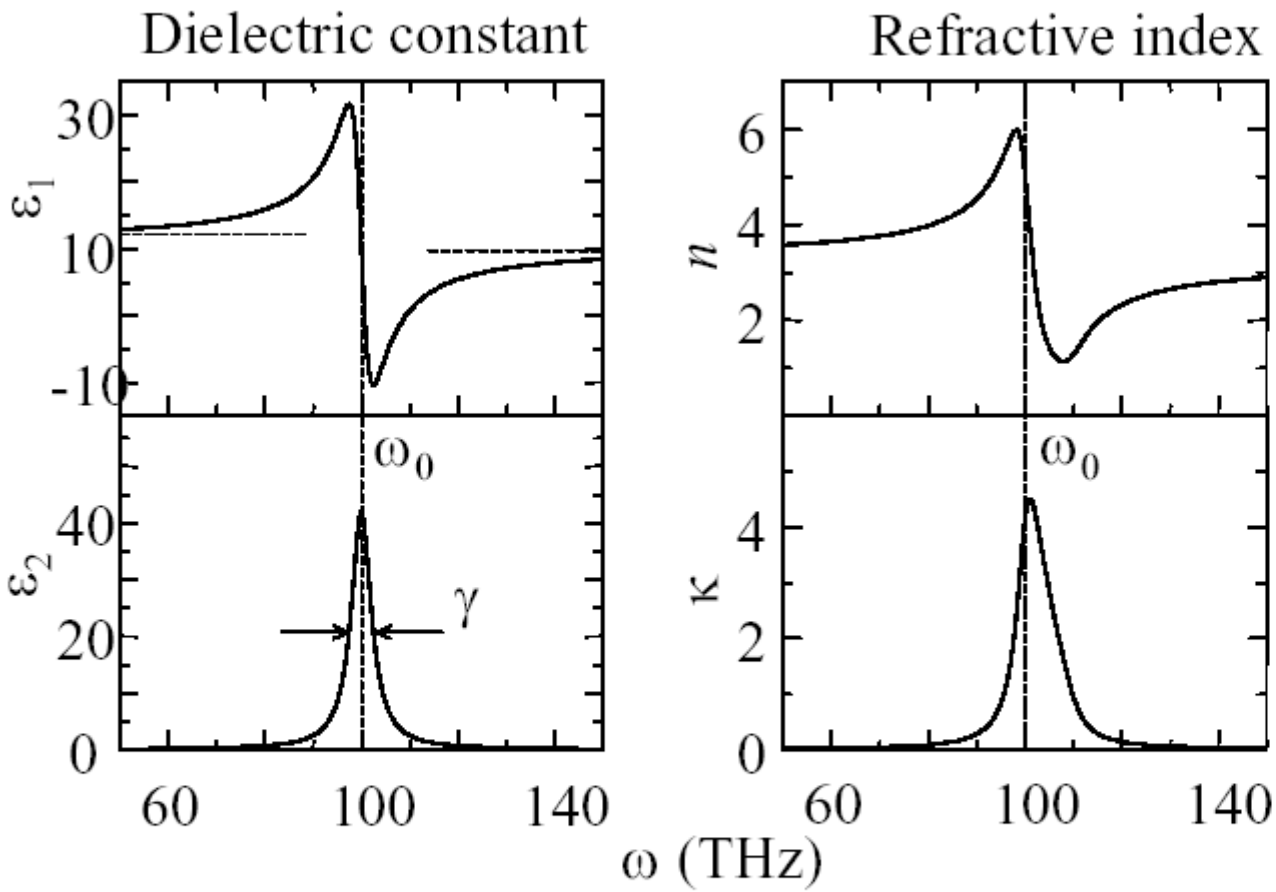


Figure 2.4
Lorentz oscillator with
$\omega_0 = 100$ THz
$\gamma = 5$ THz
$\varepsilon_{st} = 12.1$
$\varepsilon_\infty = 10$

1 THz = 10^{12} Hz

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}$$

- absorption at ω_0
- FWHM = γ

M. Fox-livro

Multiple resonances

REVISÃO

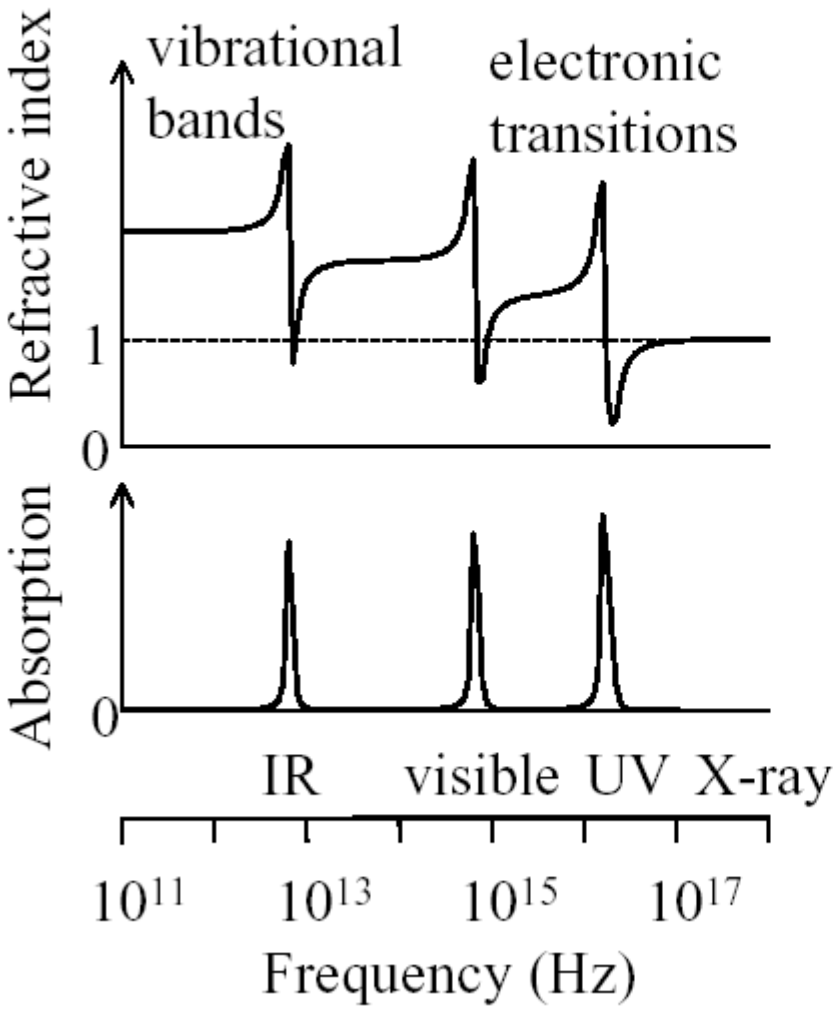


Figure 2.6

resonant frequencies:

phonons	IR
valence electrons	vis/UV
core electrons	X-ray

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \sum_j \frac{f_j}{\left(\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega\right)}$$

- f_j = **oscillator strength**
- classical theory $\Rightarrow f_j = 1$
- quantum theory $\Rightarrow f_j$ determined by transition probability

M. Fox-livro

Dispersive prisms

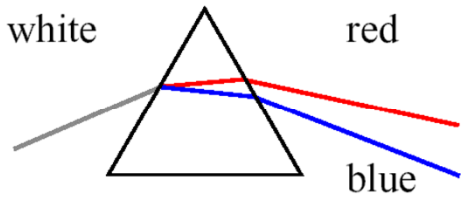


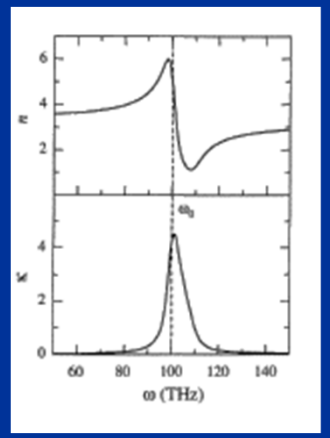
Figure 2.10

Dispersion of light by a prism

- NORMAL dispersion: *n* increase with frequency
- ANOMALOUS dispersion: occurs near resonance lines

Índice de refração

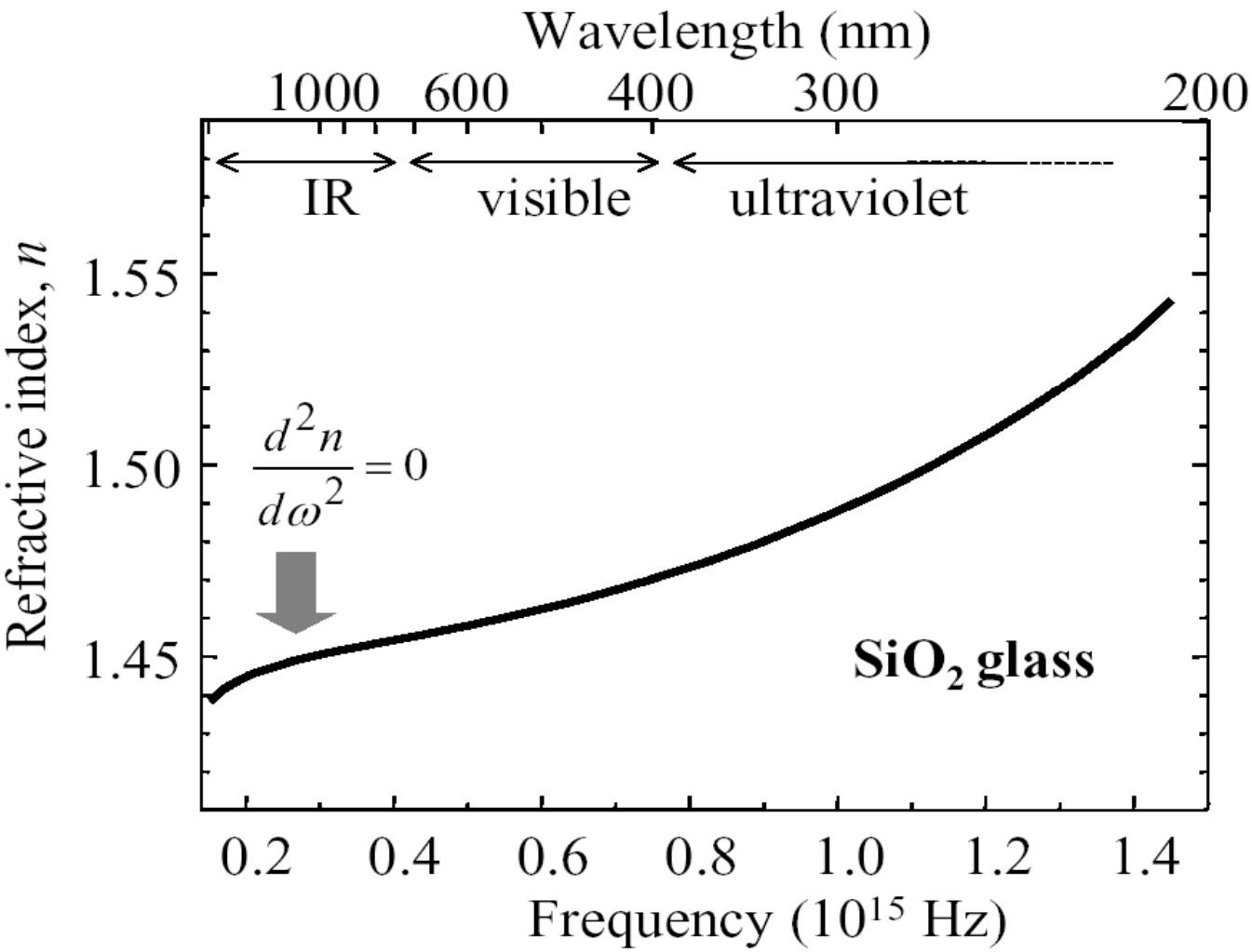
Coeficiente de absorção



Dispersion

REVISÃO

Figure 2.9
glass dispersion



- Group velocity dispersion (GVD) $\propto d^2n/d\omega^2$
- GVD determines pulse spreading in optical fibres
- GVD = 0 near 1300 nm

M. Fox-livro

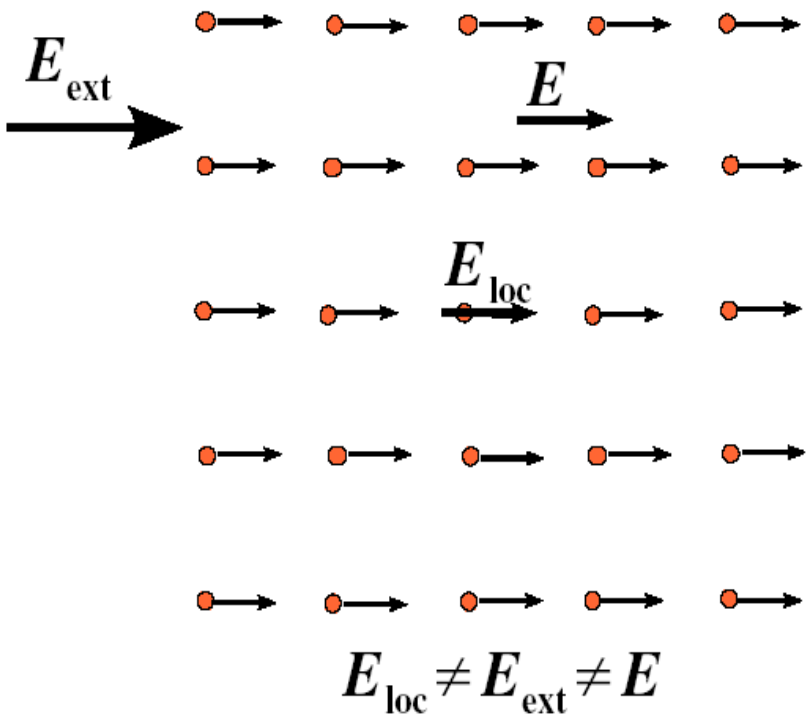
O cálculo que mostrei serve para um meio rarefeito

campo local

REVISÃO

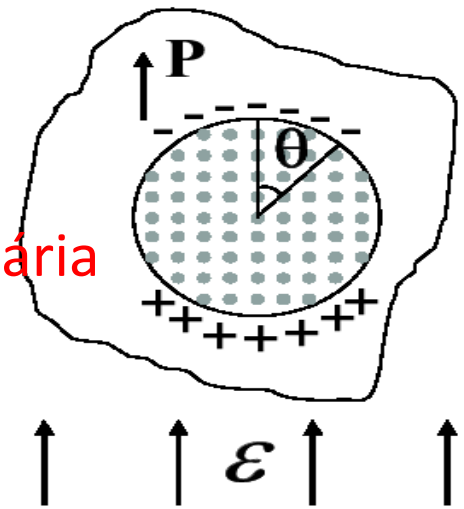
Como descrever um meio denso ?

Considere um meio homogêneo denso submetido a um campo óptico externo



constituintes ativos sentem o campo local

Esfera imaginária



REVISÃO

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Polarizabilidade

$$p = \epsilon_0 \alpha E_{loc} \quad \Rightarrow \quad P = Np$$

$$P = N\epsilon_0\, \alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

Susceptibilidade linear

$$P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E$$

$$\chi^{(1)} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}$$

REVISÃO

$$\epsilon^{(1)} = 1 + \chi^{(1)}$$

Relação de Clausius-Mossoti

$$\frac{\epsilon^{(1)} - 1}{\epsilon^{(1)} + 2} = \frac{N\alpha}{3}$$

$$\chi^{(1)} = \frac{\epsilon^{(1)} + 2}{3} N\alpha$$

Fator de campo local

Engrandecimento da susceptibilidade linear

Optical anisotropy

REVISÃO

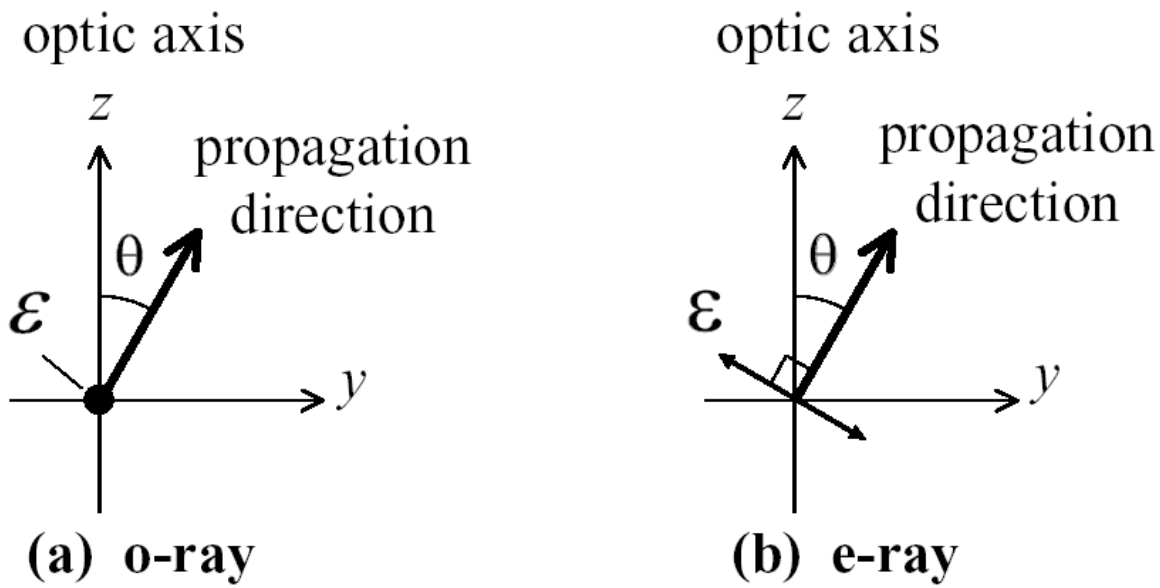


Figure 2.12
Birefringence caused by difference of dielectric constants (and hence refractive index) along the different crystal axes.

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

M. Fox-livro

Críticas ao modelo clássico do oscilador harmônico

Qualquer energia (frequência de oscilação) é permitida.

Ou seja:

- O espectro é continuo e sabemos (pela Mecânica Quântica) que deve ser discreto.
- A separação entre as energias dos estados é constante: $\hbar\omega_0$

Não leva em conta a deformação do potencial quando se considera grandes deslocamentos dos elétrons em relação ao núcleo atômico.

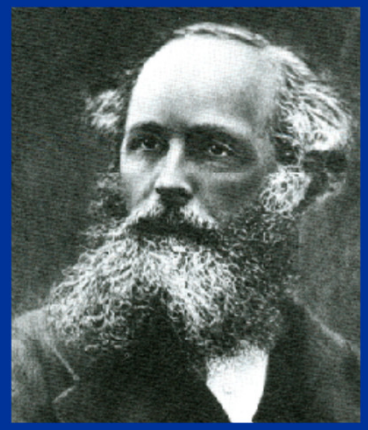
Não considera a existência de várias ressonâncias.

O modelo não prevê a ionização do átomo.

Óptica Linear
Modelo clássico de Lorentz

- Sabemos descrever a absorção óptica e a refração.
- Descrevemos o comportamento do índice de refração em função da frequência óptica.
- Como a luz propaga em meios transparentes e/ou absorvedores?

Equações de Maxwell



James Clerk Maxwell
(1831-1879)

$$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla . \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla . \vec{P} \qquad J_f = \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \qquad J_b = \frac{dP}{dt}$$

$$\rho_f = J_f = 0 \qquad \nabla.\vec{E} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} = \frac{-\nabla.\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} \qquad \nabla.\epsilon\vec{E} = 0$$

Meio homogêneo: $\epsilon = constante$

$$\nabla.\vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M} = \mu\vec{H}; \qquad \vec{M} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_b + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\frac{d\vec{P}}{dt} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\epsilon\frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\nabla . \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla(\nabla . \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

ondas eletromagnéticas

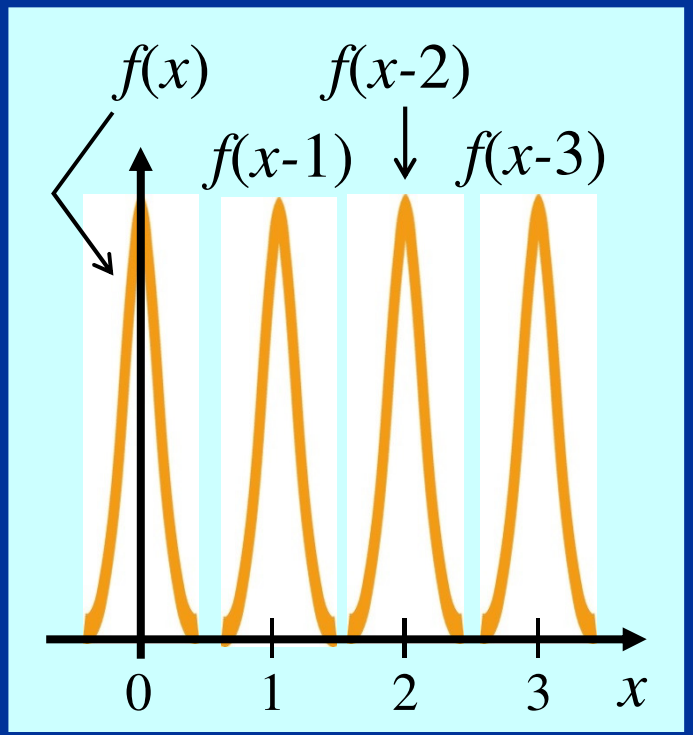
Analogamente:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Que é uma onda?

Para deslocar $f(x)$ para a direita basta mudar o argumento de x para $x-a$, onde a é um número positivo.

Se $a = \mathrm{v}\, t$, onde v é positiva e t é o tempo, o deslocamento cresce com o tempo



$f(x - \mathrm{v}\, t)$ é uma onda propagante para a direita

$f(x + \mathrm{v}\, t)$ propaga para a esquerda.

v é a velocidade da onda

Onda uni-dimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

v é a velocidade da onda

A equação de onda tem uma solução simples

$$f(x,t) = f(x \pm \mathrm{v}t)$$

$f(u)$ pode ser qualquer função duplamente diferenciável

Equação de onda $$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Análoga da equação de uma onda acústica ou ondas na superfície da água.

Velocidade de propagação da onda: $\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon.$

No vácuo: $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$ $\qquad c = 3 \times 10^8\ m/s$

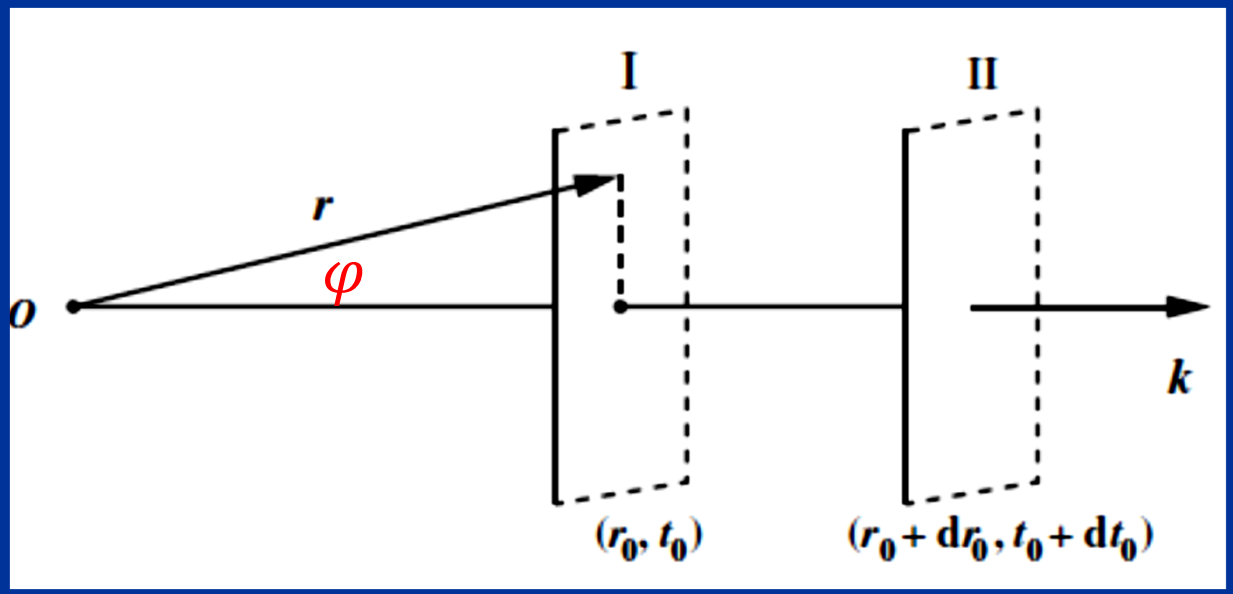
Solução geral:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r}, t) \exp[i\emptyset(\vec{r}, t)]$$

amplitude fase

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r},t)\exp[i\emptyset(\vec{r},t)]$$

$$\emptyset(\vec{r},t) = \vec{k}.\vec{r} - \omega t = kr\,cos\varphi - \omega t = kr_0 - \omega t$$



Diferença de fase: $d\emptyset_0 = k\,dr_0 - \omega\,dt_0$

$$d\emptyset_0 = \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial r}\right)_{r_0} dr_0 - \left(\frac{\partial\emptyset}{\partial t}\right)_{t_0} dt_0$$

$$\boxed{\frac{dr_0}{dt_0} = v_p = \frac{\omega}{k}}$$

Velocidade de fase

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r},t)\exp[i\emptyset(\vec{r},t)]$$

Mas, o campo elétrico é uma grandeza física real, e então deve ser representado por

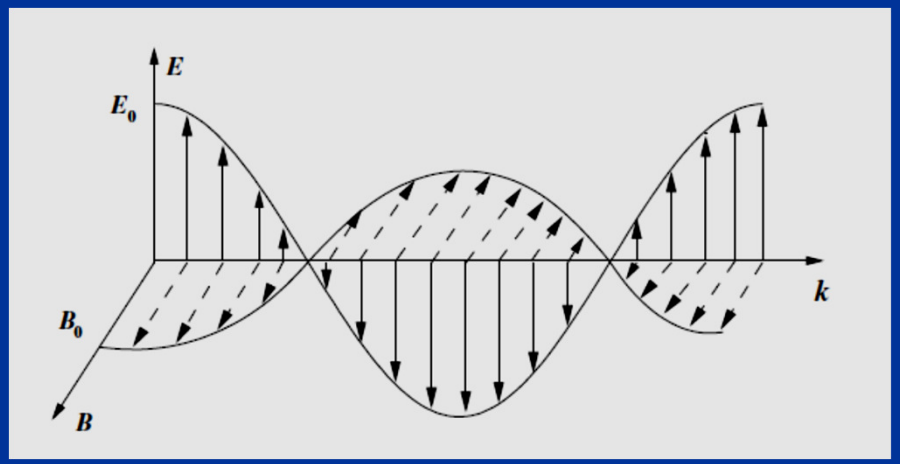
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\{\overrightarrow{E_0}(\vec{r},t)\exp[i\emptyset(\vec{r},t)] + \text{c.c.}\}$$

$$\vec{k}.\overrightarrow{E_0} = 0$$

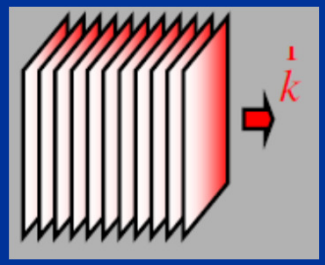
$$\vec{k}.\overrightarrow{B_0} = 0$$

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{\vec{k}\times\overrightarrow{E_0}}{\omega}$$

$$\overrightarrow{E_0} = -\frac{\vec{k}\times\overrightarrow{B_0}}{\omega}$$



$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r},t)\exp[i\emptyset(\vec{r},t)]$$



$$\emptyset(\vec{r},t) = \vec{k}.\vec{r} - \omega t = kr\,cos\varphi - \omega t = kr_0 - \omega t$$

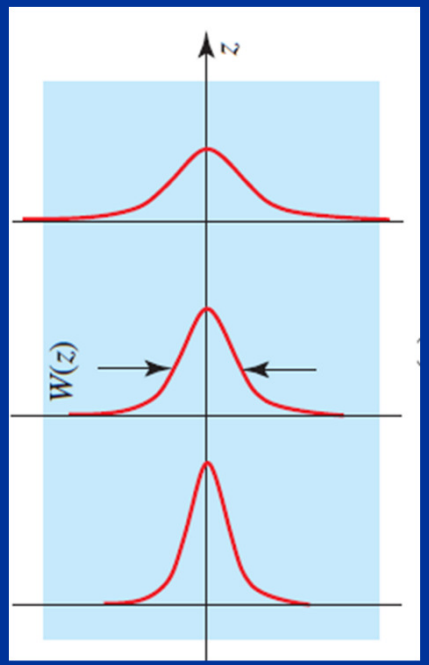
Onda Plana: Sentido físico ???????

Energia localizada em todas as regiões

Energia total é infinita

Sistema físico real

difração



Para entender como construir um feixe de luz

vamos lembrar como

foram construídos os pacotes de onda

no curso de Estrutura da Matéria

Se a luz atua como partículas, porque as partículas de matéria também não se comportam como ondas?

L. de Broglie, Tese 1923

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

h = constante de Planck

p = momentum da partícula

Louis de Broglie
(1892-1987)

Consequentemente

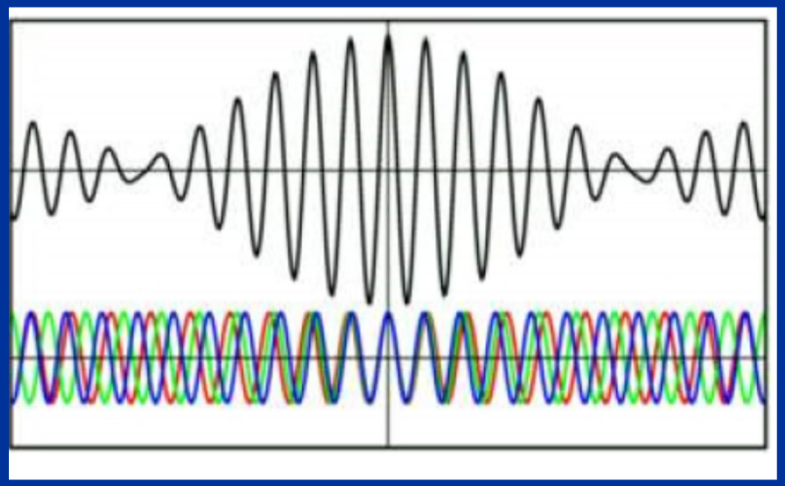
$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

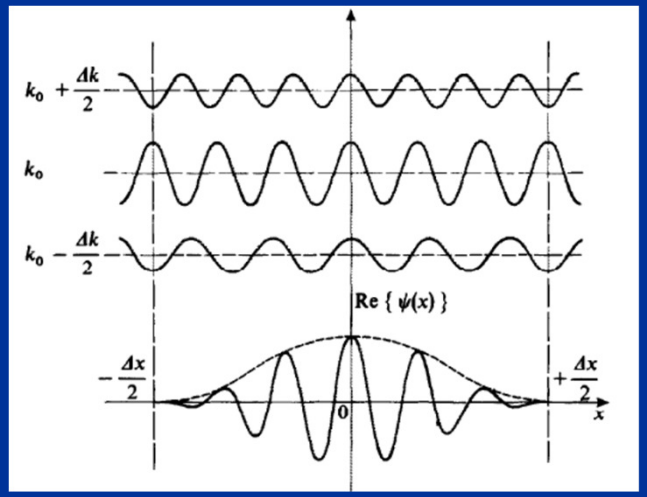
E é a energia da partícula.

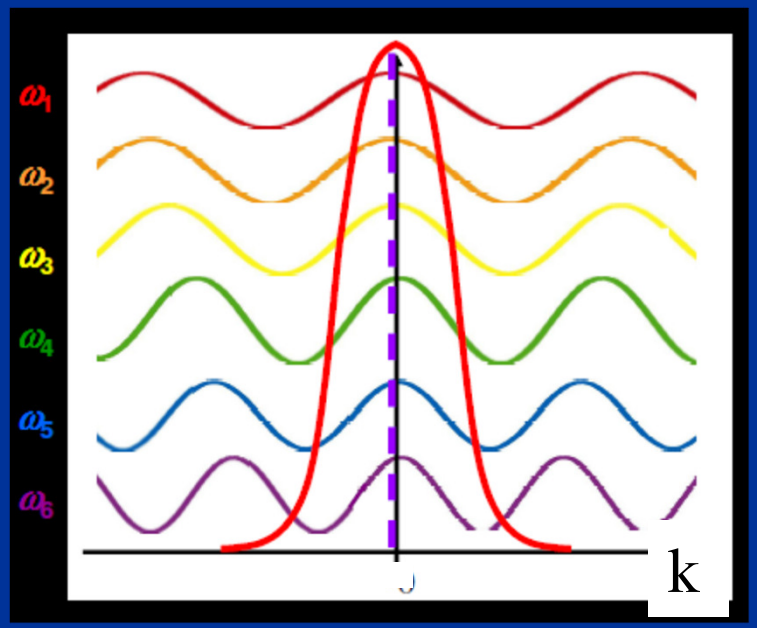
As partículas teriam seu próprio Princípio de Incerteza

$$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

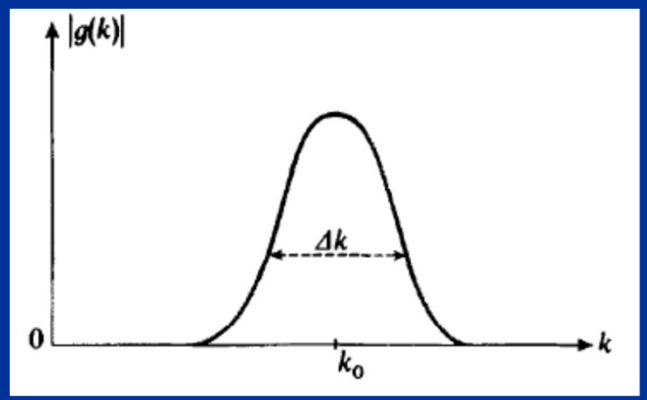
Onda de *de Broglie* = onda plana com comprimento de onda bem definido. A partícula pode estar em qualquer lugar.





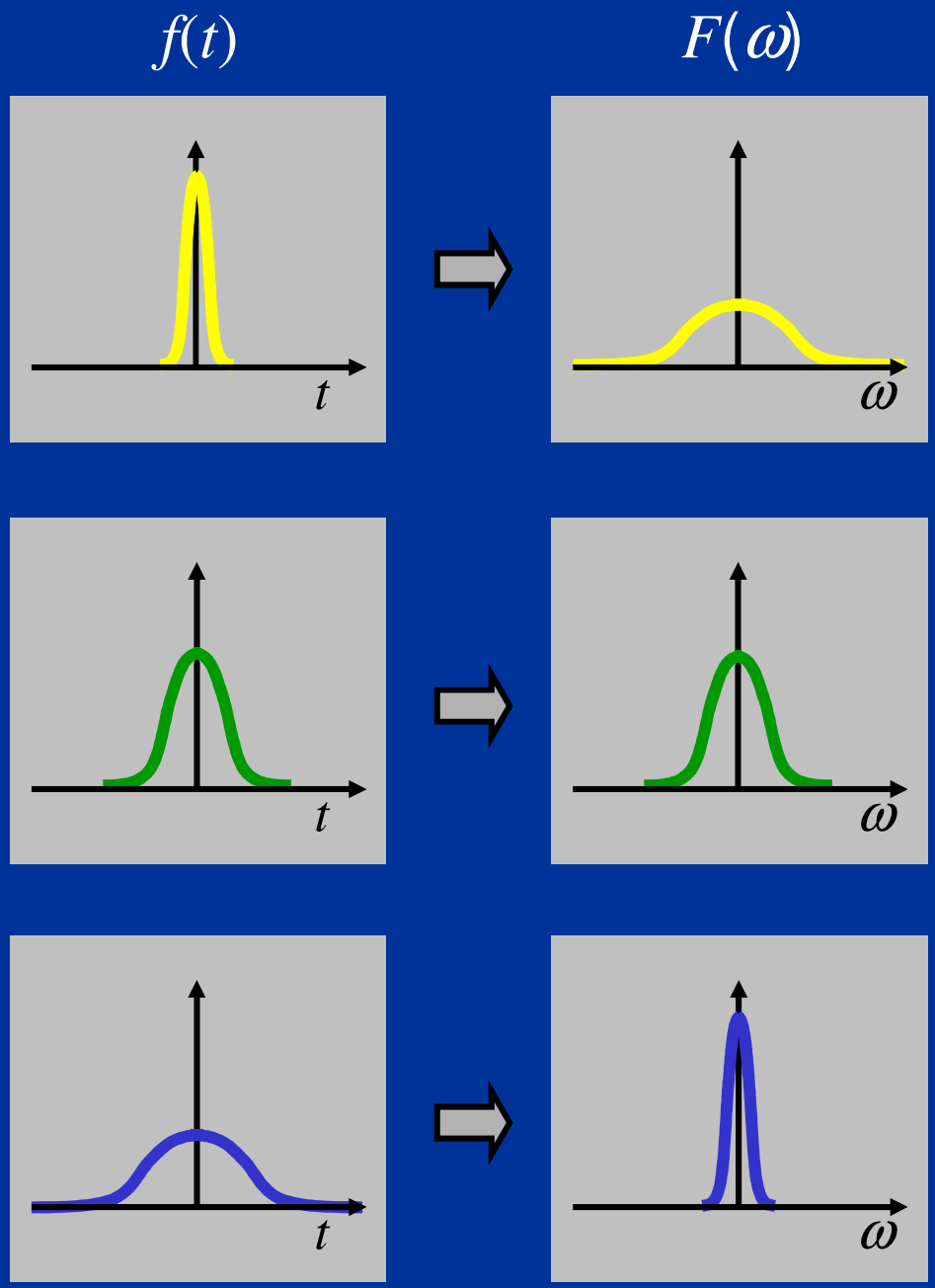


$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{ikx}\, dk$$



Também vale para pulsos

Quanto mais curto o pulso, mais largo será o espectro

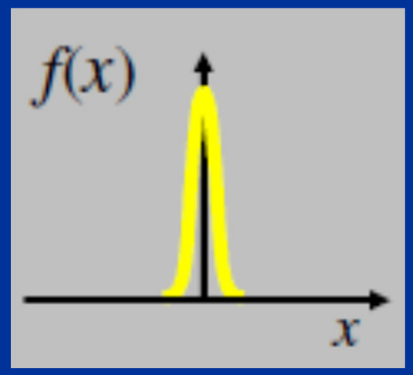


Essência do Princípio da Incerteza

$$\Delta\omega \times \Delta t = 1$$

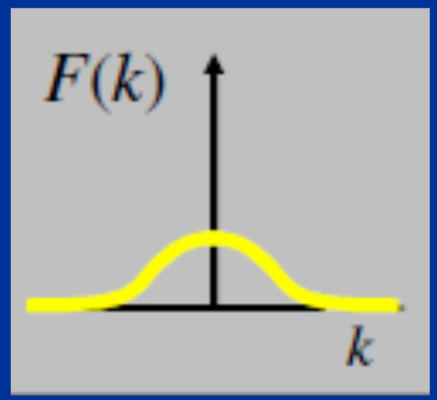
Transformada de Fourier com relação ao espaço unidimensional– 1D

Se $f(x)$ é uma função da posição x podemos definir uma transformada de Fourier espacial



$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-ikx)dx$$

k - frequência espacial



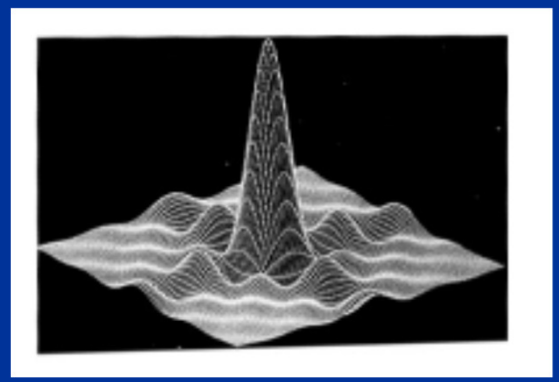
Tudo que foi feito com relação a t e ω também se aplica aos domínios x e k

Considerando duas dimensões espaciais x e y

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy$$

Se $\quad f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

a TF - 2D separa em duas TF – 1D



Solução: feixe óptico

Livro: YARIV

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r},t)\exp[i\emptyset(\vec{r},t)] = \vec{E}\,(\vec{r})\ \exp(-i\omega t)$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) - \mu_0\epsilon\,(-i\omega)^2\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\varepsilon}(\vec{r})\exp(ikz)$$

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+k^2\right\}\vec{\varepsilon}(\vec{r})\exp(ikz) = 0$$

Slowly varying envelope approximation
SVEA

$$\frac{\partial^2\varepsilon(\vec{r})}{\partial z^2} \ll k\,\frac{\partial\varepsilon(\vec{r})}{\partial z}$$

Variação lenta na escala do comprimento de onda

$$\boxed{\nabla_\perp^2\varepsilon(\vec{r}) + \cancel{\frac{\partial^2\varepsilon(\vec{r})}{\partial z^2}} + 2ik\,\frac{\partial\varepsilon(\vec{r})}{\partial z} = 0}$$

Livro: YARIV

Se o feixe de luz tem simetria cilíndrica

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon(\vec{r})}{\partial\rho}\right)+2ik\frac{\partial\varepsilon(\vec{r})}{\partial z}=0$$

$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$$

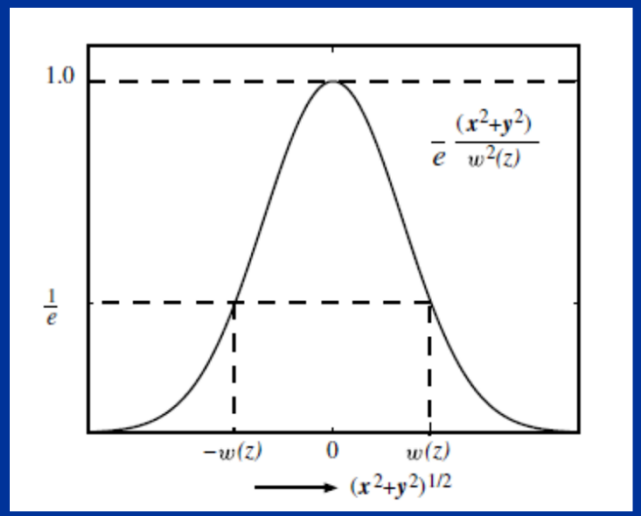
$$\varepsilon(\rho,z)=A\exp\left\{i\left[p(z)+\frac{k\rho^2}{2q(z)}\right]\right\}$$

$$E(\rho)=A\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right]$$

$$w^2(z)=w_0^2(1+z^2/z_0^2) \qquad w_0^2=\frac{2z_0}{k}$$

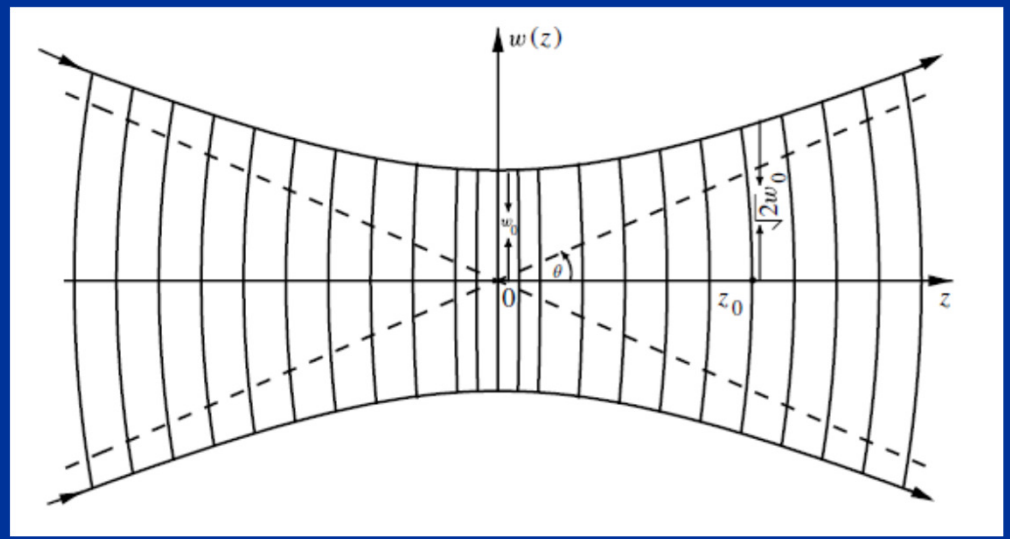
Livro: YARIV

$$E(\rho) = A\frac{w_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)}\right]$$



$$\mathrm{w}(z=0) = w_0$$

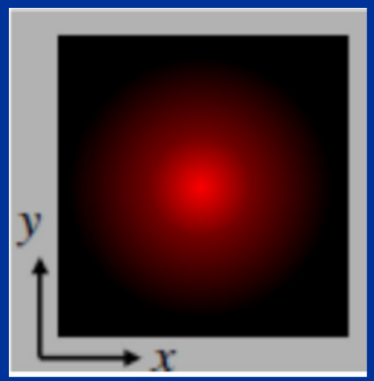
$$\mathrm{w}(z=z_0) = \sqrt{2}\ w_0$$



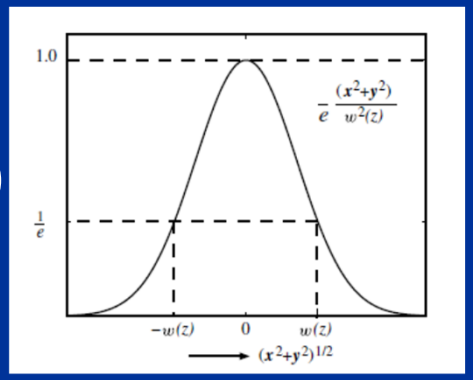
$$\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{dw(z)}{dz} = \frac{w_0}{z_0}$$

$$\frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi w_0 n_0}$$

Feixe Gaussiano



$2w(z)$



$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

w_0

Raio (mínimo) do feixe

$$z_R = \frac{\pi n_0 w_0^2}{\lambda}$$

Comprimento de Rayleigh

AR: $\lambda = 800\ nm$ $\quad w_0 = 10\ \mu m$

$z = 2\ mm$ $\quad w \approx 35\ \mu m$

$$z_R = 0.4\ mm$$

I_0 (z=0) $\longrightarrow$ I (z=2 mm) = I_0 (z=0) $(w_0 / w)^2$

I (z=2 mm)= 0.08 I_0 (z=0)