Oscilador Harmônico Forçado

Existe um total de 3 forças agindo no sistema: $-bv$; $-kx$ e F_{ext}.

$$\therefore \quad F_{resultante} = -bv - kx + F_{ext} = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}$$

A solução geral p/ este caso possui dois termos,

1) a solução da equação homogênea $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
2) a solução particular que depende da força externa

deste modo, a solução total será:

$$X(t) = X_p(t) + X_h(t)$$

A demonstração do teorema acima é imediata:

Sendo $X_p(t)$ tal que

$$m\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + kx_p = F_{ext} \qquad (I)$$

e $x_h(t)$ tal que

$$m\ddot{x}_h + b\dot{x}_h + kx_h = 0 \qquad (II)$$

Somando I e II temos:

$$m\underbrace{(\ddot{x}_p + \ddot{x}_h)}_{\ddot{x}(t)} + b\underbrace{(\dot{x}_p + \dot{x}_h)}_{\dot{x}(t)} + k\underbrace{(x_p + x_h)}_{x(t)} = F_{ext}$$

Vamos começar pelo caso mais simples:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Assim, a solução $x_h(t) = A_1 e^{P_+ t} + A_2 e^{P_- t}$

uma solução particular possível é:

$$x_p(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t \Rightarrow \text{desta forma:}$$

$$\dot{x}_p(t) = -\omega \alpha \operatorname{sen} \omega t + \omega \beta \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 (\alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t)$$

Assim, temos:

$$m\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + kx_p = F_{ext} \Rightarrow$$

$$\ddot{x}_p + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\gamma} \dot{x}_p + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x_p = \frac{F_{ext}}{m}$$

$$\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_{ext}}{m} = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \omega t$$

$$= -\omega^2 (\alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t) + 2\gamma\omega(-\alpha \operatorname{sen} \omega t + \beta \cos \omega t) +$$

$$+ \omega_0^2 \cdot (\alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \left[\alpha \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega\beta\right] \cdot \cos \omega t + \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\beta - 2\gamma\omega\alpha\right] \operatorname{sen} \omega t$$

$$= \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

A solução acima precisa ser válida p/ qualquer tempo t $\therefore$ o termo em "sen ωt" tem que ser nulo $\Rightarrow$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\beta = 2\mu\omega\alpha \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\mu\omega}\beta$$

e o termo em "cos ωt" deve ser F_0/m

$$\therefore \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{2\mu\omega} + 2\mu\omega\right]\beta = \frac{F_0}{m} \quad \therefore$$

$$\beta = \frac{2\mu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \cdot \frac{F_0}{m}$$

$$\alpha = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \cdot \frac{F_0}{m}$$

$$\Rightarrow X_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}}\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \cdot \cos\omega t + \frac{2\mu\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \operatorname{sen}\omega t\right]$$

sendo ϕ tal que

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow$$

fase entre o movimento e a força aplicada!!!

$$\boxed{X_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \phi)}$$

Vamos observar o que ocorre no caso em que o sistema oscila sem força externa, ou seja, quando $\gamma < \omega_0 \Rightarrow$ sub amortecido

Neste caso, a solução geral é:

$$x_h = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Notem que a fase $\underline{\underline{\theta}}$ não é a mesma fase $\underline{\underline{\phi}}$ da força externa. θ é uma fase da solução homogênea e que só depende das condições iniciais.

Assim, a solução geral torna-se:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \underbrace{A e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)}_{\text{solução transiente}} + \underbrace{\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t - \phi)}_{\text{solução estacionária}}$$

Só o primeiro termo tem a parte $e^{-\gamma t}$, ou seja, a solução homogênea tende à zero e p/ $t \gg 1/\gamma$ a solução fica sendo somente a particular.

Isso vale p/ todos tipos de amortecimentos.

$\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = \underbrace{A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-\gamma_2 t}}_{\text{transiente}} + \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$\gamma = \omega_0$

$$x(t) = \underbrace{(A+Bt)e^{-\gamma t}}_{\text{transiente.}} + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

Note, por exemplo, que se temos x_0 e v_0 temos que resolver:

$$\dot{x}(0) = v_0$$
$$x(0) = x_0$$

Ex. caso $\gamma > \omega_0$ com $x_0 = x_0$, $v_0 = 0$

$$x(t) = Ae^{-\gamma_1 t} + Be^{-\gamma_2 t} + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma_1 A e^{-\gamma_1 t} - \gamma_2 B e^{-\gamma_2 t} - \frac{\omega\, F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow x(0) = A + B + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \cdot \cos\phi = x_0$$

$$v(0) = -\gamma_1 A - \gamma_2 B + \frac{\omega\, F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \operatorname{sen}\phi = 0$$

$\Rightarrow$ A e B são dados pelas duas equações acima!

Voltando p/ o caso geral, considerando o tempo longo, ou seja, $t \gg 1/\gamma$

$$x(t) \to x_p(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

, para um dado F_0,

como aumentamos a amplitude de oscilação?

Resposta: ajustando a frequência "ω"

ou seja, podemos maximizar $\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$ simplesmente, minimizando o termo dentro da raiz:

chamando $h(\omega) = (\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2$

temos $\frac{dh}{d\omega} = 0 = -2(\omega_0^2-\omega^2).2\omega + 8\gamma^2\omega = 0$

Existem 2 soluções $\omega = 0 \Rightarrow$ não oscila!

$$-\cancel{2}(\omega_0^2-\omega^2).\cancel{2} + \overset{2}{\cancel{8}}\gamma^2 = 0 \quad \therefore$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2 = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2}$ chamamos ω_R = frequência de ressonância!

Note que só há ressonância se $\gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

ou seja, em casos de amortecimento crítico ou forte não existe ressonância.

Outra observação importante é que

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) \xrightarrow{\gamma \ll \omega_0} \omega_0^2$$

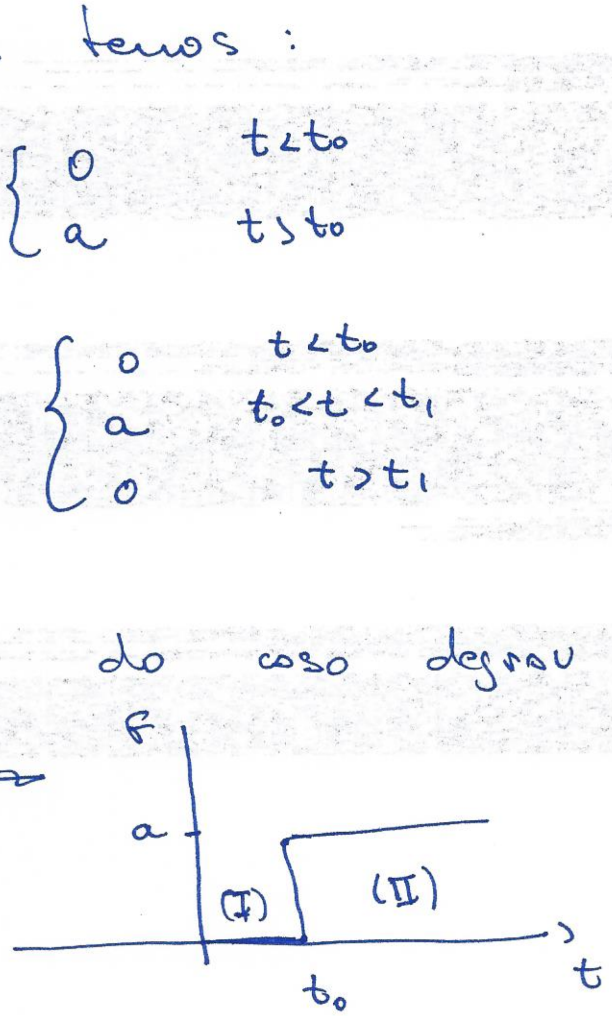
ou seja, no limite de $\gamma \to 0$ a frequência de ressonância tende à frequência natural do sistema.

Outros exemplos de forças temos:

Força degrau : $F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ a & t > t_0 \end{cases}$

Força impulso $F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ a & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$

Vamos ver o exemplo do caso degrau



precisamos resolver 2 problemas :

(I) $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ com x_0, v_0

Resolvido este problema, temos (exemplo p/ $\gamma < \omega_0$)

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \theta) \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

das condições iniciais temos A e θ

Assim, obtemos $\left.\begin{matrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{matrix}\right\}$ Essas serão as novas condições iniciais p/ $t > t_0$ (região II)

(II)

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = a$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_h(t) + \dot{x}_p(t)$$

e as condições em $t = t_0$ já estão ~~e pelo contínuo~~ definidos.

exemplo: $F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a & t > 0 \end{cases}$ $\qquad x_0 = X_0$, $v_0 = 0$

p/ $\gamma < \omega_0$

Assim $x_h(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \theta)$.

como $F(t) = a$ p/ $t > 0 \Rightarrow$ uma possível solução é um polinômio em t: $x(t) = \sum_i \alpha_i t^i$

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, \alpha_i\, t^{i-1}$$

$$\ddot{x}_p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\, \alpha_i\, t^{i-2}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{a}{m}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[i(i-1)\alpha_i t^{i-2} + 2\gamma . i\alpha_i t^{i-1} + \omega_0^2 \alpha_i t^i \right] = \frac{a}{m}$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)\alpha_i t^{i-2} + 2\gamma i \alpha_i t^{i-1} + \omega_0^2 \alpha_i t^i$$

$$+ \; 2\gamma \alpha_1 + \omega_0^2 \alpha_1 t + \omega_0^2 \alpha_0 = \frac{a}{m}$$

tem que ser solução p/ qualquer $t \geq 0 \Rightarrow$

p/ $t = 0$ temos $2\alpha_2 + 2\gamma \alpha_1 + \omega_0^2 \alpha_0 = \frac{a}{m}$

p/ $t \neq 0$ cada termo t^n tem que zerar $\Rightarrow$

$\alpha_n = 0$ p/ $n > 0 \Rightarrow$ só $\alpha_0 \neq 0$ e

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{a}{\omega_0^2 m}} \quad \therefore \quad x_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2 m}$$

$$\therefore \quad x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{a}{\omega_0^2 m}$$

$$\dot{x}(t) = -\gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta) - \omega_1 A e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \theta)$$

se $V_0 = 0 \Rightarrow -\gamma A \cos\theta - \omega_1 A \operatorname{sen}\theta = 0$

$$\therefore \boxed{\operatorname{tg}\theta = -\frac{\gamma}{\omega_1}} \qquad \cos\theta = \frac{\omega_1}{\sqrt{(\omega_1^2 + \gamma^2)}} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$x_0 = A . \cos\theta + \frac{a}{\omega_0^2 m} \quad \therefore \quad x_0 = A . \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{a}{\omega_0^2 m}$$

$$\boxed{A = \left(x_0 - \frac{a}{\omega_0^2 m}\right)\frac{\omega_0}{\omega_1}}$$

Principio da superposição

Seja uma força externa $F_n(t)$ tal que a solução particular da equação

$$m\ddot{x}_p + b\dot{x}_p + kx_p = F_n(t)$$

é dada por $x_{np}(t)$

Se tivermos N forças externas agindo no sistema, tal que

$$F(t) = \sum_n F_n(t)$$

A solução particular do problema será

$$x_p(t) = \sum_n x_{np}(t)$$

A prova deste teorema é também simples

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}_{1p} + b\dot{x}_{1p} + kx_{1p} = F_1 \\
+\ & m\ddot{x}_{2p} + b\dot{x}_{2p} + kx_{2p} = F_2 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
+\ & m\ddot{x}_{np} + b\dot{x}_{np} + kx_{np} = F_n
\end{aligned}
$$

$$
= m(\ddot{x}_{1p}+\ddot{x}_{2p}+\dots\ddot{x}_{np}) + b(\dot{x}_{1p}+\dot{x}_{2p}+\dots+\dot{x}_{np}) + k(x_{1p}+x_{2p}+\dots x_{np}) =
$$

$$
= F_1 + F_2 + \dots F_n
$$

Agora, se $F(t)$ é uma função contínua, pelo menos em um "pedaço", podemos expandir em funções senoidais do tipo:

$$
F(t) = c_n \cos(\omega_n t - \phi_n)
$$

p/ um dado n a solução particular é: fase adicional

$$
x_{np}(t) = \frac{1}{m}\frac{c_n}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_n^2)^2+4\gamma^2\omega_n^2}}\cos(\omega_n t - \phi_n - \delta_n)
$$

$$
\delta_n = tg^{-1}\left(\frac{2\omega_n\gamma}{\omega_0^2-\omega_n^2}\right)
$$

e $X_p(t) = \sum x_{np}(t)$

No caso da função ser contínua dentro de um período T e ser periódica, podemos expandi-las

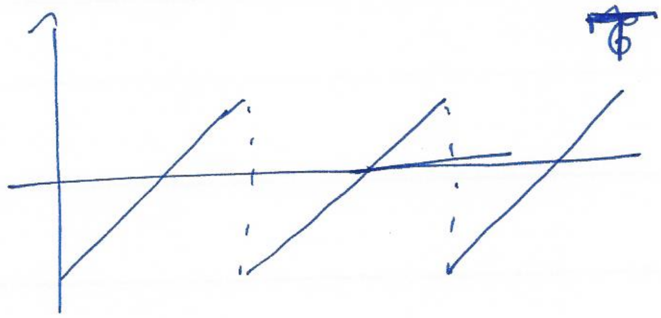
Usando o teorema de Fourier de modo que:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t).\cos(n\omega t)\,dt \quad e \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t).\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt$$

Exemplo: função dente de serra

$$F(t) = A\cdot\frac{t}{T} \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$



$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt = \frac{2A}{T^2}\cdot\left[\cancel{\frac{1}{n^2\omega^2}\operatorname{sen}(n\omega t)} - \frac{1}{n\omega}t\cos(n\omega t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2A}{T^2}\cdot\left(\frac{-1}{n\omega}\cdot T\cdot\left[\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}\right]\right) = \frac{\cancel{2}A}{\cancel{T^2}}\cdot\frac{-1\,\cancel{T^2}}{\cancel{2}\pi n}\cdot(-1)^n$$

$$\boxed{b_n = \frac{A}{n\pi}\cdot(-1)^{n+1}}$$

$a_n = 0$ pois $F(t)$ é ímpar e $\cos(n\omega t)$ é par!

$$\boxed{F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(n\omega t)}$$