

Notas de aula baseadas no Livro do
Verdeyen com pontos de outros livros da lista
de bibliografia!

Revisão da Teoria Eletromagnética

Começamos o curso revisando as equações de
Maxwell e a propagação de ondas.

Considerando um meio material, as equações de
Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \rightarrow \text{Lei de Gauss}$$

densidade de carga livre!

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \text{Lei de Gauss p/ Magnetismo}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{Lei de Maxwell-Faraday.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \text{Lei de Ampère}$$

corrente de condução

Lembrando das relações

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{P}$ = polarização
 $\vec{M}$ = magnetização
 } do meio.

Seguindo a notação do Verdey, usaremos (2)
 Letras minúsculas p/ campos/vetores que dependem de $\vec{r}$ e t , Assim, reescrevemos as equações de Maxwell como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{d}' &= \rho_f \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b}' &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{e}' &= -\mu_0 \frac{d\vec{h}'}{dt} - \mu_0 \frac{d\vec{m}'}{dt} \\ \vec{\nabla} \times \vec{h}' &= \vec{j}' + \epsilon_0 \frac{d\vec{e}'}{dt} + \frac{d\vec{p}'}{dt}\end{aligned}$$

Usaremos também que, para a variação sinusoidal do campo com o tempo, são válidas as relações

$$\vec{e}'(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

com $\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e $\vec{E}(\vec{r})$ uma grandeza complexa e não dependente do tempo.

Relações idênticas serão consideradas para os demais vetores!

uma vez que a dependência temporal é do tipo
 " $e^{i\omega t}$ "

$$\text{temos que : } \frac{d\vec{h}'}{dt} = \text{Re} \{ i\omega \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} \}$$

de modo que as duas últimas equações de Maxwell reduzem-se a :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\epsilon_0 \vec{E} + i\omega\vec{P} = \vec{J} + i\omega\vec{D} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H} - i\omega\mu_0 \vec{M}$$

por hora, vamos considerar a propagação de ondas no vácuo e em meios dielétricos nos quais podemos desconsiderar a ~~em~~ influência da magnetização do meio, de modo que: $\vec{M} \rightarrow 0$ e

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}}$$

Podemos também escrever a polarização do

meio como $\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \vec{E}}$

No mundo real, o termo χ é um tensor complexo que depende da interação da luz com os átomos do meio de modo que a polarização é dada por:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \left[\underbrace{\chi^{(1)} \cdot \vec{E}}_{\text{limite da óptica linear}} + \underbrace{\chi^{(2)} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} + \chi^{(3)} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} + \dots}_{\text{termos de óptica não linear}} \right]$$

Por hora, vamos manter apenas o termo linear de modo que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ e χ é um parâmetro do meio. Assim,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \cdot \vec{E}$$

Chamando $(1 + \chi) = n^2 \Rightarrow$ índice de refração complexo ⁽⁴⁾

então: $\boxed{\nabla \times \vec{H}' = \vec{J}' + i\omega \epsilon_0 n^2 \vec{E}'}$

Usando essas duas formas finais para as equações de Maxwell, podemos explorar a propagação de onda no meio.

Vamos considerar a ausência de corrente $\vec{J}'$ de modo que temos: (voltando à forma original)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}' = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}'}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} \Rightarrow \text{aplicando } \vec{\nabla}' \times \text{ na segunda equação temos:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\mu_0 \vec{\nabla}' \times \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}' \times \vec{H}')$$

e, substituindo $\vec{\nabla}' \times \vec{H}'$ temos

$$\vec{\nabla}' \times (\vec{\nabla}' \times \vec{E}') = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}') \quad \text{Lembrando!}$$

Lembrando que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}' \times \vec{A}) = \vec{\nabla}' (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

temos: $\vec{\nabla}' (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}') - \nabla^2 \vec{E}' = -\mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}'}{\partial t^2}$

No espaço livre, ou seja, no vácuo, temos que $\rho = 0$ (densidade de carga) e $\vec{P}' = 0 \therefore$

No vácuo temos:

(5)

$$-\nabla^2 \vec{e}' = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{e}'}{dt^2} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{e}' - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{e}'}{dt^2} = 0}$$

onde

$$\boxed{c \equiv \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}}$$

↓
velocidade da luz no vácuo

da mesma forma, chegamos que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{h}' - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{h}'}{dt^2} = 0}$$

Essas são as equações de onda no vácuo

tomando a dependência temporal do tipo $e^{i\omega t}$

$$\text{temos que } \frac{d^2 \vec{h}'}{dt^2} = -\omega^2 \vec{h}' \Rightarrow$$

$$\cancel{\nabla^2 \vec{h}'} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{h}' = 0$$

$\therefore$ vamos ver o caso de 1-D digamos $h \rightarrow h_y \hat{y}$
e propagando na direção $\hat{z} \Rightarrow$ onda plana e uniforme em (x,y)

$$\text{temos } \nabla^2 \vec{h}' = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}') - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}')$$

$$\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{h}'} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{x}$$

Assim, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial h}{\partial z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \hat{y} + \cancel{\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z} \hat{z}} \quad (6)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = -\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \hat{y} \quad \therefore$$

A equação de onda torna-se

$$+ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \hat{y} + \frac{\omega^2}{c^2} h \hat{y} \quad \therefore \text{uma solução}$$

$$\therefore h(z,t) = H(\omega, k_z) \cdot e^{-ik_z z} \cdot e^{i\omega t}$$

Como $h(z,t)$ tem que ser real, temos

$$h(z,t) = \text{Re} \left\{ H(\omega, k_z) e^{i(\omega t - k_z z)} \right\}$$

onde k deve satisfazer a equação de onda $\therefore$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k^2 h \quad \therefore \quad -k^2 h + \frac{\omega^2}{c^2} h = 0$$

$$\therefore \boxed{k_z = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Agora, generalizando para uma onda propagando-se em uma direção arbitrária $\vec{a}$, temos

$$\vec{h}(\vec{r}', t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}(\omega, \vec{k}_0) e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}')} \right\} \quad (7)$$

onde $|\vec{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$ e $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{a}_m$
 $\vec{a}_m$ vetor unitário na direção de propagação.

Na verdade, qualquer função de $f(t - \frac{\vec{a}_m \cdot \vec{r}'}{c})$ é solução da equação de ondas. Mas como a variação temporal é sinusoidal, a solução segue o resultado acima!

com isso, a equação de ondas p/ uma onda eletromagnética se propagando no espaço livre é:

$$\vec{h}(\vec{r}', t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}(\omega, \vec{k}_0) e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}')} \right\}$$

$$\vec{e}(\vec{r}', t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\omega, \vec{k}_0) e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}')} \right\}$$

$\vec{k}_0$ é o vetor de onda e descreve a direção de propagação da onda. De forma mais correta, $\vec{k}_0$ surge ~~como~~ da transformada de Fourier em 3-D ~~de~~ nas coordenadas espaciais!

Um resultado relevante que surge das equações

acima é que:

$$\text{(Das equações de Maxwell)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} & H_y e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} & H_z e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} & H_y e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} & H_z e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \end{vmatrix} e^{i\omega t}$$

componentes do vetor

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \left\{ \left[-i k_y H_z + i k_z H_y \right] \hat{x} + \left[-i k_z H_x + i k_x H_z \right] \hat{y} + \left[-i k_x H_y + i k_y H_x \right] \hat{z} \right\} e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

$$= -i \cdot (\vec{k}_0 \times \vec{H}(\omega, \vec{k}_0)) \cdot e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} = \epsilon_0 i\omega \vec{E}(\omega, \vec{k}_0) e^{i\omega t} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

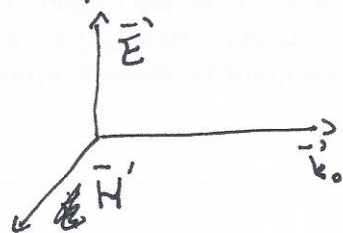
Assim

$$\boxed{\vec{k}_0 \times \vec{H} = -\epsilon_0 \omega \vec{E}}$$

de forma similar temos que

$$\boxed{\vec{k}_0 \times \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H}}$$

ou seja, $\vec{H}$, $\vec{E}$ e $\vec{k}_0$ são perpendiculares entre si



Além disso $\vec{H}$ e $\vec{E}$ estão em fase pois não existe nenhum termo de "defase" nas equações e

$$|\vec{E}| \cdot \epsilon_0 \omega = |\vec{H}| \cdot |\vec{k}_0| = |\vec{H}| \cdot \frac{\omega}{c}$$

$$\therefore \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{1}{\epsilon_0 c} = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \approx 377 \Omega$$

impedância da onda no espaço livre!

(9)

Outro resultado relevante é que o vetor de Poynting $\vec{S}' = \frac{1}{2} \vec{E}' \times \vec{H}'^*$ aponta na direção de $\vec{k}_0$ no espaço livre!

ou seja
$$\vec{S}' = \frac{1}{2} \vec{E}' \times \vec{H}'^* = \frac{1}{2} \vec{E}' \times \frac{(\vec{k}_0 \times \vec{E})^*}{\omega \mu_0} = \frac{1}{2} \frac{\vec{E}' \cdot \vec{E}'^* \vec{k}_0}{\omega \mu_0}$$

A intensidade, ou seja, a potência por unidade de área carregada pelos ondas na direção de propagação é

$$I = |\vec{S}'| = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}'|^2}{\omega \mu_0} \cdot \frac{|\vec{k}_0|}{\omega \mu_0} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}'|^2 \cdot \omega}{c \cdot \mu_0 \omega^2}$$

$$I = \frac{1}{2} |\vec{E}'|^2 \cdot \frac{c}{c^2 \mu_0} = \boxed{\frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}'|^2}$$

Propagação num meio isotrópico

Se definimos magnetização de modo similar à definição de polarização podemos escrever

$$\vec{m} = \chi_m \vec{h} \quad \text{onde } \chi_m \text{ é a suscetibilidade magnética do meio.}$$

Assim,
$$\vec{b} = \mu_0 (\vec{h} + \vec{m}) = \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{h}$$

Assim, as equações de onda se reduzem a:

$$\nabla \times \vec{h} = \epsilon_0 \frac{d\vec{e}'}{dt} + \frac{d\vec{p}'}{dt} = \epsilon \frac{d\vec{e}'}{dt}$$

$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$

$$\nabla \times \vec{e}' = -\mu_0 \frac{d\vec{h}}{dt} - \mu_0 \frac{d\vec{m}}{dt} = -\mu \frac{d\vec{h}}{dt}$$

ou seja, ~~fazendo~~ num meio isotrópico, no qual 10
 χ e χ_m são constantes e independente da orientação

temos:

$$\nabla^2 \vec{e}' - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{e}'}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{h}' - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{h}'}{\partial t^2} = 0$$

sendo $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow$ o módulo do vetor de onda

Agora e' : $|\vec{k}| = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$

Em meios nos quais $\chi_m \rightarrow 0$ e $\mu \rightarrow \mu_0$ temos

$$|\vec{k}| = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot n^2 \epsilon_0} \quad [n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}]$$

$\therefore |k| = \frac{\omega}{c} \cdot n \Rightarrow$ velocidade da luz no meio
 e' $\boxed{\frac{c}{n}}$

e as equações de onda reduzem a:

$$\nabla^2 \vec{e}' - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{e}'}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{h}' - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{h}'}{\partial t^2} = 0$$

Em diversos meios de ganho usados em lasers, o ~~material~~ ~~material~~ material e' dopado, exemplos: Ruby: Crômio e' inserido num cristal de Al_2O_3 ; Ti:Sapphire, no qual o cristal de safiro (Al_2O_3) e' dopado com átomos de titânio.

em casos assim, é instrutivo separar a contribuição (11) do meio e do vácuo durante a polarização de modo que a equação de onda torna-se

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\epsilon_0 \cdot n^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\text{devido ao meio}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{\rho}_a}{\partial t}}_{\text{vácuo}}$$

Assim :

$$\nabla^2 \vec{E} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \underbrace{\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\rho}_a}{\partial t^2}}_{\text{Age como uma fonte de campo elétrico!}}$$

Ate o momento lidamos com o problema assumindo que χ ~~é~~ é uma constante e que $\vec{P}$ é paralelo a $\vec{E}$! O que ocorre é que, de forma geral, isso não é verdade (AINDA BEM!!!) e o vetor $\vec{P}$ é escrito :

$$P_x = \epsilon_0 (\chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z)$$

$$P_y = \epsilon_0 (\chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z)$$

$$P_z = \epsilon_0 (\chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z)$$

Ou seja, χ é um tensor para um sistema x, y, z aleatório! (12)

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

Podemos diagonalizar a matriz de modo que:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

e

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 \chi_{11} E_x \\ P_y &= \epsilon_0 \chi_{22} E_y \\ P_z &= \epsilon_0 \chi_{33} E_z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Note que } \vec{P} \text{ não é} \\ \text{necessariamente paralelo a } \vec{E} \\ \text{isso só ocorre se } \vec{E} \text{ estiver} \\ \text{em um dos eixos!} \end{array}$$

Esses eixos são chamados de eixos principais do cristal e o vetor $\vec{D}$ é dado por

$$D_x = \epsilon_1 E_x = \epsilon_0 (1 + \chi_{11}) E_x$$

$$D_y = \epsilon_2 E_y = \epsilon_0 (1 + \chi_{22}) E_y$$

$$D_z = \epsilon_3 E_z = \epsilon_0 (1 + \chi_{33}) E_z$$

Em princípio, $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$ (bi-axial), todavia, um caso interessante é quando $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$, neste caso o cristal é chamado de uniaxial e a direção $\vec{D}$ (a que tem o ϵ diferente) é chamado de eixo óptico

ou seja, onda propagando neste eixo terá $\vec{E}$ pertencente ao plano xy e, independentemente da orientação de $\vec{E}$ no plano, a onda seguirá o mesmo padrão encontrado em meios isotrópicos, ou seja, encontrará um padrão ORDINÁRIO.

Agora, se a onda se propaga em uma outra direção qualquer e $\vec{D}$ tem uma componente no eixo $\hat{z}$ algo EXTRAORDINÁRIO acontece!

Para o caso uniaxial temos

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

onde $n_o^2 = (1 + \chi_{11}) = (1 + \chi_{22})$ e $n_e^2 = (1 + \chi_{33})$

Agora, lembrando que, no vácuo temos:

$$\vec{k}_0 \times \vec{H}' = -\epsilon_0 \omega \vec{E}'$$

$$\vec{k}_0 \times \vec{E}' = \mu_0 \omega \vec{H}'$$

e que no meio dielétrico isso torna-se:

$$\vec{k}' \times \vec{H}' = -\omega \vec{D}'$$

$$\vec{k}' \times \vec{E}' = \mu_0 \omega \vec{H}'$$

de modo que $\vec{k}' \cdot \vec{D}' = 0$ sempre, independentemente da anisotropia! já $\vec{E}'$ NÃO é necessariamente perpendicular a $\vec{k}'$.

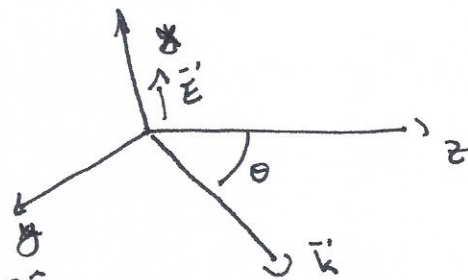
Vamos analisar dois casos:

14

1) se $\vec{E}'$ está no plano xy

Vamos dizer que $\vec{E}' = E_x \hat{x}$

$$\vec{k} = k \cos \theta \hat{z} + k \sin \theta \hat{y}$$



$$\vec{D}' = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D}' = \epsilon_0 n_0^2 E_x \hat{x}$$

e a equação de onda fica

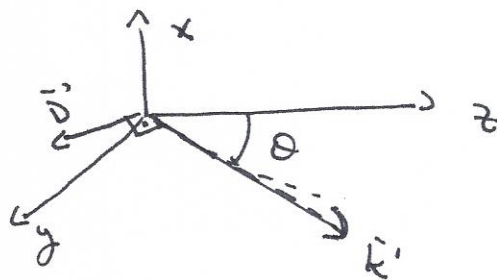
$$\nabla^2 \vec{E}' - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}'}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2 \therefore$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} n_0}$$

independentemente de θ !

2) Agora, se o vetor $\vec{E}'$, ao entrar no meio tem uma componente em $\hat{z}$, temos

$$\vec{k} = k \cos \theta \hat{z} + k \sin \theta \hat{y}$$



sem perder generalidade, vamos dizer que $\vec{D}'$ está no plano yz $\Rightarrow$

$$\vec{k} \cdot \vec{D}' = 0 \quad \therefore \quad \vec{D}' = D \cdot (\sin \theta \hat{z} - \cos \theta \hat{y})$$

Com isso, sendo

$$\vec{D}' = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \vec{E}' \quad \therefore$$

$$\epsilon_0 n_o^2 E_x = D_x$$

$$E_x = 0$$

$$\epsilon_0 n_o^2 E_y = D_y$$

$$E_y = \frac{1}{\epsilon_0 n_o^2} (-\cos \theta) D$$

$$\epsilon_0 n_e^2 E_z = D_z$$

$$E_z = \frac{1}{\epsilon_0 n_e^2} (\sin \theta) D$$

ou seja, note que $\vec{k} \cdot \vec{E}' \neq 0$

Sendo assim, usando que

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}'$$

$$\vec{k} \times \vec{E}' = \mu_0 \omega \vec{H}$$

temos $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}') = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}'$

$$\vec{D}' \cdot [\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}') - \vec{E}' (\vec{k} \cdot \vec{k})] = [-\mu_0 \omega^2 \vec{D}'] \cdot \vec{D}'$$

$$-\vec{D}' \cdot \vec{E}' \cdot k^2 = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}' \cdot \vec{D}' \quad \therefore$$

$$\boxed{k^2 = +\mu_0 \omega^2 \frac{\vec{D}' \cdot \vec{D}'}{\vec{D}' \cdot \vec{E}'}}$$

definindo o n_{eff} do meio como

$$\frac{1}{n_{\text{eff}}^2} = \left(\frac{k_o}{k} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\mu_0 \omega^2} \frac{\vec{D}' \cdot \vec{E}'}{\vec{D}' \cdot \vec{D}'} = \epsilon_0 \frac{\vec{D}' \cdot \vec{E}'}{\vec{D}' \cdot \vec{D}'}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot \left(D^2 \frac{\cos^2 \theta}{\epsilon_0 n_o^2} + D^2 \frac{\sin^2 \theta}{\epsilon_0 n_e^2} \right)}{D^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \Rightarrow$$

(16)

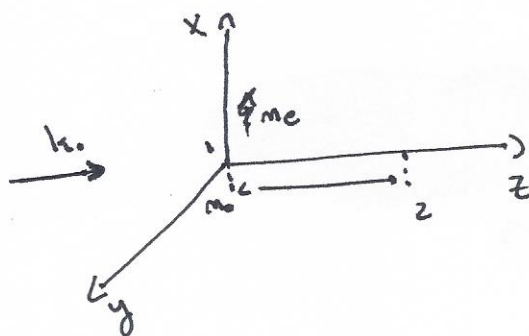
$$\boxed{\frac{1}{n_{\text{eff}}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}}$$

Exemplo: Placas de $\lambda/2$ e $\lambda/4$

Suponha um material com n_o e n_e

Vou chamar de n_o o índice de refração na direção y

Vou chamar de n_e o índice de refração na direção x



Suponha um campo $\vec{E}$ entrando neste cristal tendo

$$\vec{E}_1 = E_{10} (\hat{x} + \hat{y}) e^{i\omega t - ik_z z}$$

ao penetrar o meio, a componente $\hat{x}$ encontrará um índice n_e enquanto a componente $\hat{y}$ encontrará um índice n_o . Assim, após percorrer uma distância "d" dentro do

Meio, o campo será:

$$\vec{E}_2 = E_{10} \left(\hat{x} \cdot e^{-i\omega \frac{n_e}{c} d} + \hat{y} \cdot e^{-i\omega \frac{n_o}{c} d} \right) \times e^{i\omega t - ik_z(z-d)}$$

Note que a fase de cada direção é diferente e podemos escrever: $\vec{E}_2 = E_{10} \cdot (\hat{x} + \hat{y} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c} \cdot (n_0 - n_e) \cdot d}) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-i\phi}$ (17)
 fase global

Assim, a diferença de fase é:

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c} \cdot (n_0 - n_e) d$$

Se $\Delta\phi = \pi$, $\vec{E}_2' = E_{10} (\hat{x} - \hat{y}) \cdot e^{i\omega t} e^{-i\phi}$

↳ linearmente polarizado

$$\frac{\omega}{c} (n_0 - n_e) d = \frac{2\pi \cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \cdot (n_0 - n_e) d = \pi \quad \therefore$$

$$d = \frac{1}{(n_0 - n_e)} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

esta é a placa de meia onda $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

Se $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \vec{E}_2' = E_{10} (\hat{x} - i\hat{y}) e^{i\omega t} e^{-i\phi}$

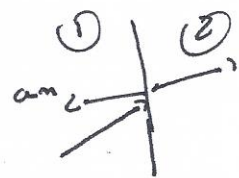
↳ circularmente polarizado.

$$\therefore \frac{\omega}{c} (n_0 - n_e) d = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad d = \frac{1}{n_0 - n_e} \cdot \frac{\lambda}{4}$$

esta é a placa de um quarto de onda $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$

Condições de contorno em interfaces

$$\hat{a}_m \times (\vec{E}_1' - \vec{E}_2') = 0$$



$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_m \cdot (\vec{D}_1' - \vec{D}_2') &= \rho_s \\ \hat{a}_m \times (\vec{H}_1' - \vec{H}_2') &= \vec{J}_s \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{nos nossos casos,} \\ &\rho_s = 0 \quad \text{e} \quad \vec{J}_s = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{a}_m \cdot (\vec{B}_1' - \vec{B}_2') = 0$$