

Ondas Reais vs Ondas Planas

(18)

A onda plana tem uma frente de onda "plana" no espaço todo, consequentemente, com energia e potência infinitas! Mas NÃO existe

Ondas reais são mais localizadas ~~em~~ ou seja, a amplitude espacial delas é "moderada" por alguma função ex:

GAUSSIANA

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right)}$$



flat top

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)} \cdot \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq x_0 \text{ e} \\ & 0 \leq y \leq y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



A função gaussiana é a mais comum nos lasers e vamos estudar como um feixe gaussiano se propaga. Vamos antes, lembrar dos princípios de incerteza

De forma ~~reduzida~~ resumida, temos que

$$\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

É fácil mostrar que este mesmo princípio pode ser considerado para espaço/momento de modo que

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}$$

Considerando que $\hbar \vec{k} = \vec{p}$ temos:

$$\boxed{\Delta x_i \Delta k_i \geq \frac{1}{2}}$$

isso implica que, se uma onda não é plana, ou seja, se Δx ou Δy é diferente de infinito, Δk_x ou Δk_y não é nulo.

Assim, vamos assumir que o campo elétrico é limitado

em $\hat{y}$:

$$E(y) = E_0 \cdot e^{-\left(\frac{y}{\omega_0}\right)^2}$$

$\omega_0 =$ cintura do feixe.

A Transformada de Fourier é:

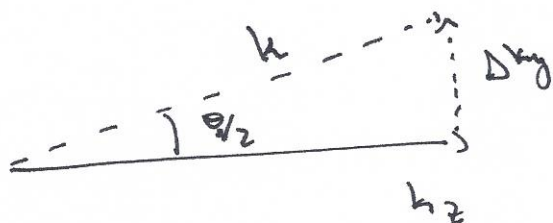
$$E(k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \cdot e^{-\left(\frac{y}{\omega_0}\right)^2} \cdot e^{-ik_y y} dy$$

$$\therefore E(k_y) = \sqrt{\pi} \cdot \omega_0 \cdot E_0 \cdot e^{-\left(\frac{k_y \cdot \omega_0}{2}\right)^2}$$

(20)

$$\Delta k_y = \frac{2}{\omega_0} \quad (\text{Hw } 1/2)$$

Portanto, se uma onda de frequência ω se propaga em z , temos $k_z = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, Assim,



Note que o feixe NÃO e^- colimado e q. e^- tal que

$$\log \frac{\theta_0}{2} = \frac{\Delta k_y}{k_z} = \frac{2}{\omega_0 \frac{2\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{\omega_0 \pi}}$$

Supondo um feixe de 800 nm (Ti:Safira) com 1 mm de cintura, temos:

$$\frac{Q_0}{2} = \frac{8 \times 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-3}} = 2.5 \times 10^{-4} \text{ W} \therefore$$

$$\therefore \frac{\theta_0}{2} \approx 2.5 \times 10^{-4} \therefore \boxed{\theta_0 \approx 5 \times 10^{-4} \text{ rad}}$$

[illegible]

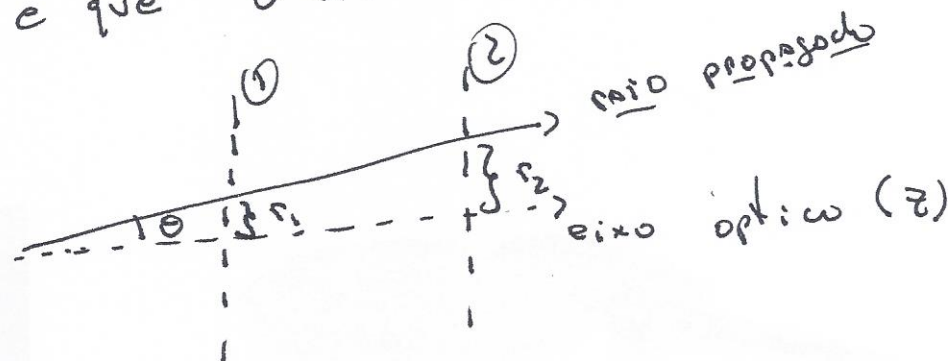
A divergência é pequena de modo que, como boa aproximação, podemos usar o traçado de raios.

Tracado de raios e Feixes em Sistemas Ópticos

(21)

Usando o fato de que o feixe Gaussiano diverge pouco, no limite que estamos interessados, podemos, como primeira aproximação, tratar a propagação dos feixes como o tracado de raios.

Vamos considerar que os raios são paraxiais, ou seja, que o desvio da propagação no eixo óptico seja pequena, e que $\theta \ll 1$ tal que $\sin \theta \approx \theta \approx \theta$



Para o tracado do raio, estamos interessados na distância ao eixo e na sua inclinação ($r' = \frac{dr}{dz}$)

Como estamos lidando com a propagação de "raios", o caminho se dá em linhas retas e a presença de um elemento óptico vai apenas mudar sua inclinação na maior parte dos casos de interesse aqui.

OBS: Propagação por meios cujo índice de refração é variável, o caminho do ~~feixe~~ raio é alterado, podendo ser até severo.

A propagação por uma distância d num meio isotrópico / homogêneo é o exemplo mais simples:

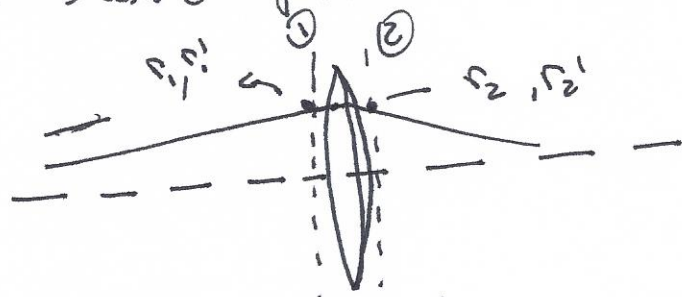
$$r_2 = 1 \cdot r_1 + d \cdot r_1'$$

$$r_2' = 0 \cdot r_1 + 1 \cdot r_1'$$

e isso pode ser expresso de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

Outro exemplo bastante útil é a passagem por uma lente fina de distância focal f



Se a lente é fina,

$$r_2 = r_1$$

$$r_2' = r_1' - \frac{r_1}{f}$$

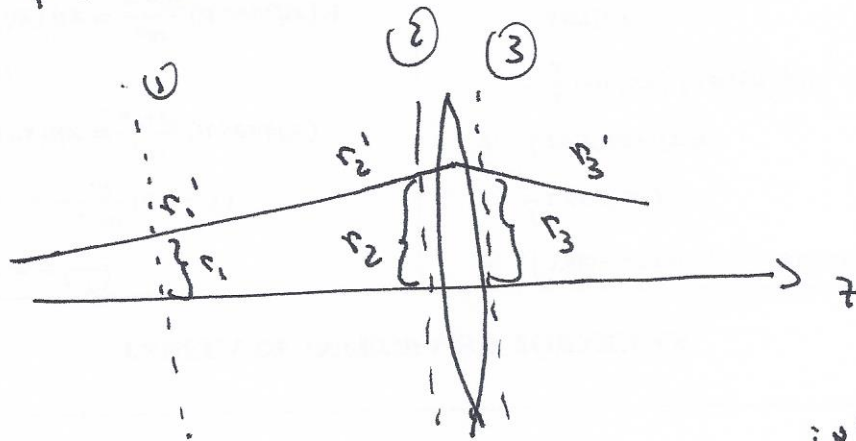
Assim

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

ou seja, o traçado de raio pode ser escrito, de forma geral como:

$$\begin{pmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{pmatrix}$$

Um exemplo interessante é de um raio que viaja uma distância d em um meio homogêneo e depois passa por uma lente de distância focal f :



Assim, temos que:

$$\begin{pmatrix} r_3 \\ r'_3 \end{pmatrix} \overset{\text{output}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} \overset{\text{input}}{}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

portanto

$$\begin{pmatrix} r_3 \\ r'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

← propagação!

com isso

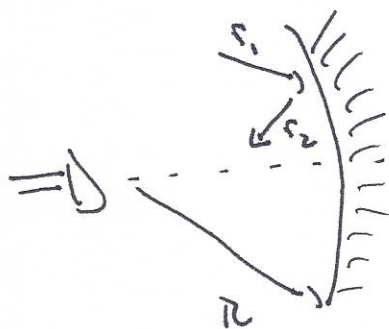
$$\begin{pmatrix} r_3 \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

outros exemplos importantes de matriz ABCD

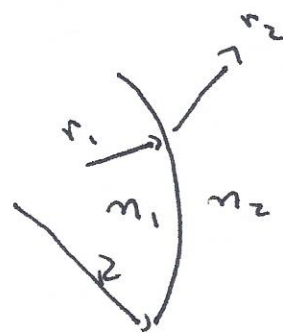
são :

Espelho :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

se for espelho plano, $R \rightarrow \infty$ interface dielétricos :

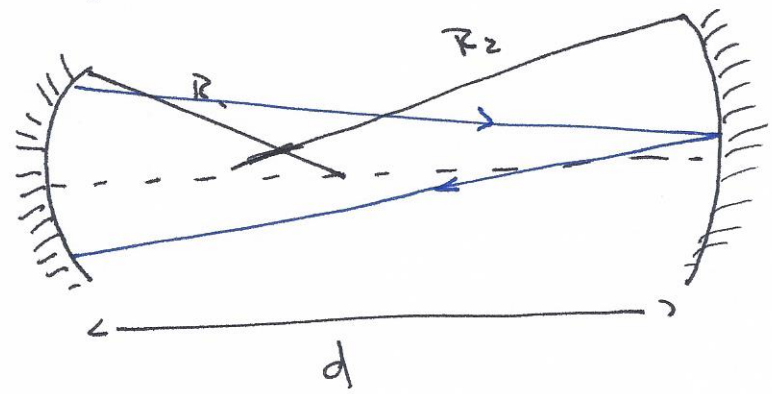
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

se a interface é plana, $R \rightarrow \infty$.

Uma propriedade importante das matrizes ABCD é que se o plano de entrada e o de saída têm o mesmo índice de refração, então o determinante é a unidade :

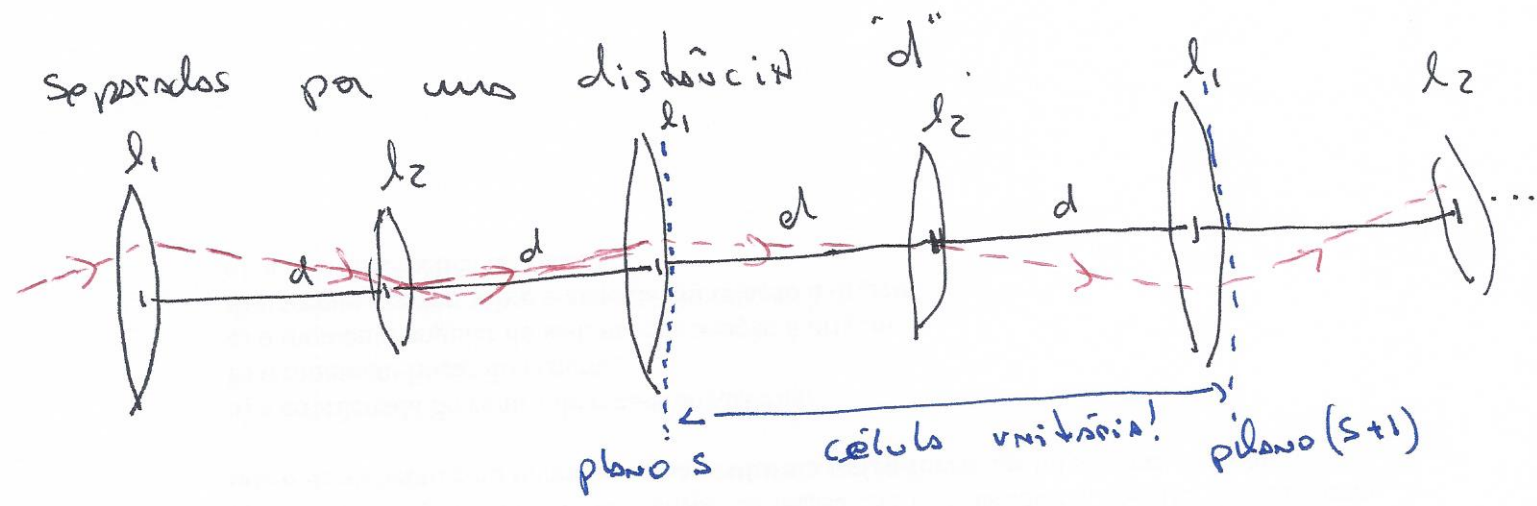
$$\boxed{AD - BC = 1}$$

Vamos ver como seria a propagação de raios em uma cavidade óptica composta por 2 espelhos esféricos:

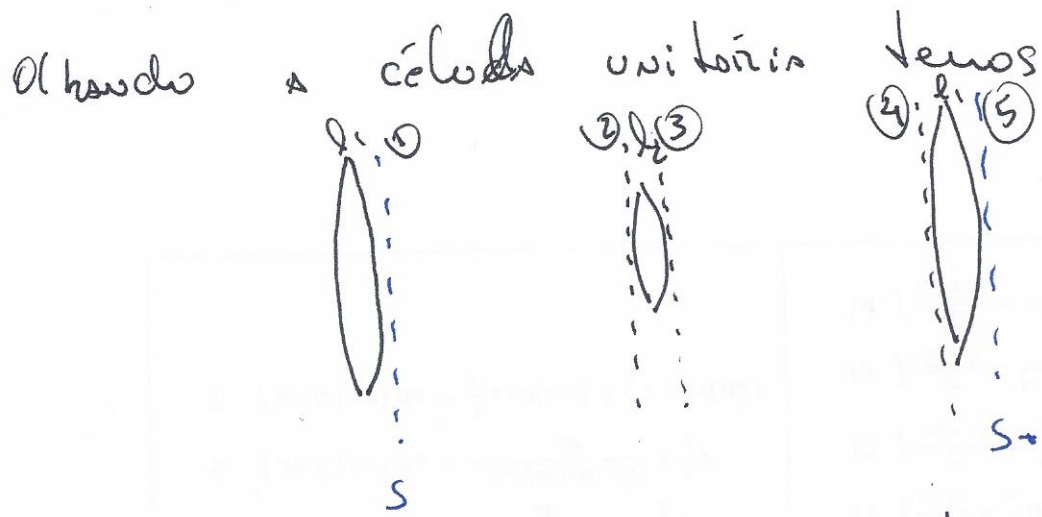


Neste sistema o ~~raio~~ ~~reflete~~ ~~em~~ ~~um~~ ~~dos~~ ~~espelhos~~ e pode eventualmente sair da cavidade, ou ficar "confinado" nela.

Para melhor ilustrar, vamos substituir os espelhos por lentes l_1 e l_2 com distâncias focais $f_i = \frac{R_i}{2}$ e separá-las por uma distância "d".



Usando o que aprendemos de matriz ABCD, podemos achar o feixe $\begin{pmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{pmatrix}$ se conhecermos $\begin{pmatrix} r_s \\ r'_s \end{pmatrix}$



dividimos en S planos de modo que:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} r_S \\ r_{S+1}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_4 \\ r_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_3 \\ r_3' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{R_1} & -\frac{2d}{R_1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{R_1} & 1 - \frac{2d}{R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2d}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} \quad \text{...} \\
 \begin{pmatrix} r_{S+1} \\ r_{S+1}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overbrace{1 - \frac{2d}{R_2}}^A & \overbrace{2d - \frac{2d^2}{R_2}}^B \\ \underbrace{\left(-\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} + \frac{4d}{R_1 R_2} \right)}_C & \underbrace{\left(-\frac{2d}{R_1} + \left(1 - \frac{2d}{R_1} \right) \left(1 - \frac{2d}{R_2} \right) \right)}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_S \\ r_{S+1}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ou seja, $r_{s+1} = A r_s + B r'_s$

$$r'_{s+1} = C r_s + D r'_s$$

e isso é verdade p/ qualquer célula unitária "s"

portanto:

$$r'_s = \frac{1}{B} (r_{s+1} - A r_s)$$

$$r'_{s+1} = \frac{1}{B} (r_{s+2} - A r_{s+1})$$

Assim $r'_{s+1} = C r_s + D \cdot \frac{1}{B} (r_{s+1} - A r_s) = \frac{1}{B} (r_{s+2} - A r_{s+1})$

com isso temos:

$$BC r_s + D r_{s+1} - DA r_s + A r_{s+1} - r_{s+2} = 0$$

$$\therefore r_{s+2} + (AD - BC) r_s - (A + D) r_{s+1} = 0$$

ou ainda:

$$r_{s+2} - (A + D) r_{s+1} + (AD - BC) r_s = 0$$

mas, m em s é igual ao m em s+1 $\therefore$ o determinante é $AD - BC = 1 \therefore$

$$r_{s+2} - (A + D) r_{s+1} + r_s = 0$$

Note que essa equação lembra aquela ~~de~~ ~~uma~~

$$\ddot{x} - b\dot{x} + x = 0$$

cuja solução é do tipo $x(t) = X_0 e^{\pm i\omega t}$
portanto, vamos propor a seguinte solução:

$$r_s = r_0 e^{is\omega}$$

Assim:

$$r_0 e^{i(s+2)\omega} - r_0 (A+iD) e^{i(s+1)\omega} + r_0 e^{is\omega} = 0$$

$$= r_0 e^{is\omega} \underbrace{\left(e^{2i\omega} - (A+iD) e^{i\omega} + 1 \right)}_{=0} = 0$$

chamando $e^{i\omega} = x$ temos

$$x^2 - (A+iD)x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(A+iD) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A+iD)^2 - 1} = \frac{1}{2}(A+iD) \pm i \sqrt{1 - \frac{1}{4}(A+iD)^2}$$

$$e^{i\omega} = e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$$

portanto a solução p/ um dado

$$r_s = r_{\max} \sin(s\theta + \alpha)$$

$$\text{Se } \theta = 0 \Rightarrow \boxed{r_s = r_0 = r_{\max} \sin\alpha}$$

Note que se θ é um n.º real, então, $r_s \leq r_{\max}$
p/ qualquer valor de s

ou seja, o raio fica confinado oscilando entre $\pm r_{\text{máx}}$, neste caso dizemos que os espelhos formam uma cavidade estruvel

A condição para que isso ocorra é que

$$\frac{1}{4}(A+D)^2 \leq 1 \quad \therefore$$

$$\left| \frac{1}{2}(A+D) \right| \leq 1 \Rightarrow$$

$$\overset{+1}{-1} \leq \frac{1}{2}(A+D) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(A+D+2) \leq 2$$

$$\text{ou ainda: } 0 \leq \frac{1}{4}(A+D+2) \leq 1$$

com isso, temos:

$$0 \leq \frac{1}{4} \left[1 - \frac{2d}{R_2} - \frac{2d}{R_1} + \underbrace{\left(1 - \frac{2d}{R_1} \right) \left(1 - \frac{2d}{R_2} \right)}_{1 - \frac{2d}{R_1} - \frac{2d}{R_2} + \frac{4d^2}{R_1 R_2}} + 2 \right] \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \left(4 - \frac{4d}{R_2} - \frac{4d}{R_1} + \frac{4d^2}{R_1 R_2} \right)$$

$$\left(1 - \frac{d}{R_2} - \frac{d}{R_1} + \frac{d^2}{R_1 R_2} \right) = \underbrace{\left(1 - \frac{d}{R_2} \right)}_{g_2} \underbrace{\left(1 - \frac{d}{R_1} \right)}_{g_1} \quad \therefore$$

Assim,

$$\boxed{0 \leq g_1, g_2 \leq 1}$$

Vamos ver alguns casos interessantes

$$1) R_1 = R_2 \therefore 0 \leq \left(1 - \frac{d}{R}\right)^2 \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq 1 - \frac{d}{R} \leq 1 \quad \therefore -1 \leq \frac{d}{R} - 1 \leq 1$$

$$0 \leq \frac{d}{R} \leq 2 \quad \therefore \boxed{d \leq 2R}$$

se $d = R \Rightarrow$ cavidade con focal

$d = 2R \Rightarrow$ cavidade esférica

2) dois espelhos planos $R_1 = R_2 = \infty \quad \therefore$

$$g_1 = g_2 = 1$$

O que ocorre agora se $\left|\frac{A+D}{2}\right| > 1$?

Neste caso, a solução da equação é

$$X = \frac{1}{2}(A+D) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A+D)^2 - 1} \Rightarrow n^\circ \text{ real}$$

$$\Rightarrow \cancel{X} e^{iq} = n^\circ \text{ real} \therefore$$

$$\cancel{X} = \cancel{C_1} e^{\alpha/s} + \cancel{C_2} e^{\alpha/s}$$

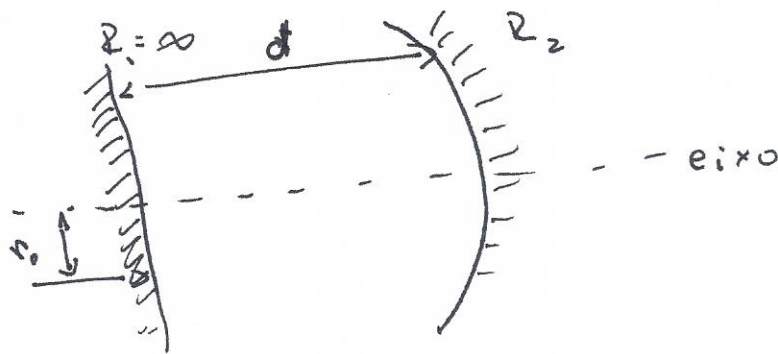
$$r_s = C_1 \left[\frac{1}{2}(A+D) + \sqrt{\frac{1}{4}(A+D)^2 - 1} \right]^s + C_2 \left[\frac{1}{2}(A+D) - \sqrt{\frac{1}{4}(A+D)^2 - 1} \right]^s$$

logo, um dos dois termos é maior que 1 e

explode p/ algum "S", Assim o raio sai da cavidade, que é dita cavidade instável (31)

Agora, vale salientar que existem lasers com cavidades instáveis pois antes do raio "sair" da cavidade ele é amplificado! Mas isso NÃO é assunto p/ esse curso!

Vamos observar um exemplo de raio traçado em uma cavidade estável:



USANDO a matriz para a célula unitária, temos

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d}{R_2} & 2d \left(1 - \frac{d}{R_2} \right) \\ -\frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2d}{R_2} \end{pmatrix}$$

Assim, $\cos \theta = \frac{A+D}{2} = \frac{1 - \frac{2d}{R_2} + 1 - \frac{2d}{R_2}}{2} = \boxed{1 - \frac{2d}{R_2}}$

ou seja, essa cavidade só é estável se

$$|d| \leq R_2$$

e, neste caso, $r_s = r_{\max} \cdot \left\{ \sin(s\theta + \alpha) \right\}$

Agora, o feixe entra na cavidade com $r_{s=0}^i = 0$ e $r_{s=0}^f = -r_0$ Abaixo do eixo

com isso: $r_{s=0} = r_{\max} \cdot \sin(\alpha) = -r_0$

Vamos assumir que d seja uma fração de R_2 , digamos

$$d = \frac{3}{4} R_2 \quad \therefore \quad \cos \theta = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

$$e \quad r_s = r_{\max} \left[\sin \left(s \cdot \frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right]$$

Vamos levar uma solução possível $\Rightarrow r_{\max} = r_0$
 $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{tal que } r_{\max} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -r_0$$

$$\text{com isso } r_s = r_0 \sin \left(s \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow r_1 = r_0 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{r_0}{2}$$

$$r_2 = r_0 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{r_0}{2}$$

$$r_3 = r_0 \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -r_0 \Rightarrow \text{e começa tudo de novo!}$$

isso ocorreu porque $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou seja,

porque $m \cdot \theta = n \cdot 2\pi$ onde m e n são
inteiros e $\boxed{n < \frac{m}{2}}$

temos então, caminho de raios repetidos.

Assim, como nas equações diferenciais, na propagação
de raios, as condições iniciais são importantes na
~~Resposta~~ solução do caminho. E dadas as condições iniciais
temos apenas uma solução possível.

Para o caso das cavidades estáveis, dados r_0 e r_0'
podemos determinar $r_{\max}$ e α sem ambiguidades.
para isso, basta lembrar que

$$\theta = \arccos\left(\frac{A+D}{2}\right) \text{ e que}$$

$$r_0 = r_{\max} \cdot \sin(\theta + \alpha) = r_{\max} \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Além disso, } r_1 = A \cdot r_0 + B \cdot r_0' = r_{\max} \cdot \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \theta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta}$$

$$\text{ou seja: } A \cdot r_0 + B \cdot r_0' = r_{\max} \cdot \sin \theta \cdot \cos \alpha + \frac{r_{\max} \cdot \sin \alpha \cos \theta}{r_0}$$

$$Ar_0 + Br_0' = r_{\max} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2} \cdot \cos \alpha + r_0 \cdot \left(\frac{A+D}{2}\right) \quad (34)$$

$$r_{\max} \cdot \cos \alpha = \frac{A \cdot r_0 + Br_0' - r_0 \cdot \frac{A+D}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}} = \frac{r_0 \cdot \frac{A-D}{2} + Br_0'}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}$$

e $r_{\max} \cdot \sin \alpha = r_0 \therefore$

$$\tan \alpha = \frac{r_0}{r_0 \cdot \left(\frac{A-D}{2}\right) + Br_0'} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}$$

No exemplo anterior, $r_0 \rightarrow -r_0$
 $r_0' \rightarrow 0$ $\therefore$

$$\tan \alpha = \frac{-r_0 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{0} \rightarrow -\infty \therefore \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \boxed{r_{\max} = r_0}$

Lembrando agora do caso de cavidades instáveis,
 A solução é do tipo

$$r_s = r_a \cdot \underbrace{\left[\frac{A+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \right]}_{F_1}^S + r_b \cdot \underbrace{\left[\frac{A+D}{2} - \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \right]}_{F_2}$$

Como discutido ~~antes~~ anteriormente, se e^- instável, (35)
então $\left| \frac{A+D}{2} \right| > 1$ e ~~se~~ F_1 e/ou F_2 e neces-

sariamente $|F_{1,2}| > 1$

com isso, sendo F_2 aquele F_i cujo módulo é
maior, p/ um s suficientemente grande

temos então que $r_0 = r_a + r_b$

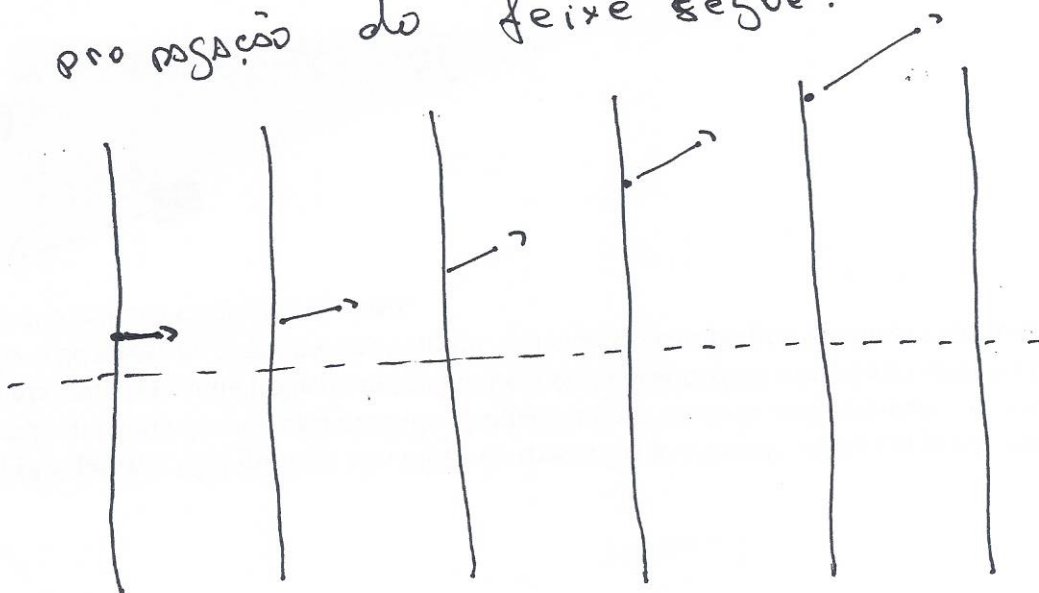
$$r_1 = r_0 \cdot A + r_0' \cdot B = r_a \cdot F_1 + r_b \cdot F_2$$

$$\therefore r_b = \frac{1}{F_1 - F_2} (r_0 (F_1 - A) - B r_0')$$

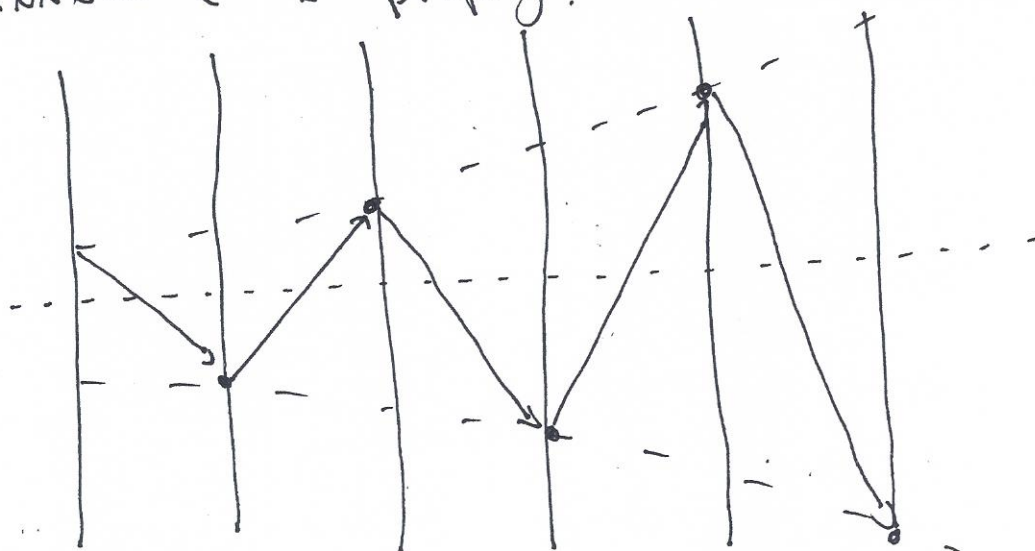
$$r_a = \frac{1}{F_2 - F_1} (r_0 (F_2 - A) - B r_0')$$

e, se $\frac{A+D}{2} > 1$ F_1 e o termo dominante

e a propagação do feixe segue:

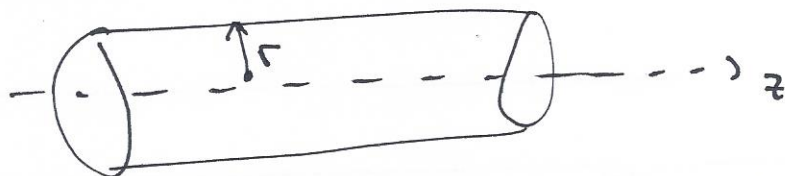


Agora, se $\frac{A+1}{2} < -1$ temos que F_2 é o termo dominante e a propagação do raio torna-se:



Propagação em meios com índice de refração variável. (lenslike = como lente)

Não é incomum encontrarmos situações nas quais o índice de refração não é homogêneo. O caso mais comum ocorre quando $n \equiv n(r)$ onde r é a distância ao eixo do material (coordenadas cilíndricas)



A dependência de n com r pode ter diversas origens físicas.

Uma delas é o design do material. Por exemplo, (37) fibras ópticas podem ser fabricadas de modo que n seja maior no centro e diminua gradativamente até a casca.

Outro exemplo é a variação de n devido a um gradiente de temperatura, como o que ocorre em tubos de gás devido à aplicação de um corrente de bombeio.

Por fim, a óptica não linear também pode mudar o índice de refração devido à própria luz propagada.
 $n = n_0 + n_2 \cdot I$
 onde n_2 é o índice de refração não linear e I é a intensidade da luz.

Se o feixe tem perfil gaussiano,

$$\vec{E}(r, z, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{-\left(\frac{r}{w}\right)^2} \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow I \propto |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_0|^2 \cdot e^{-2\left(\frac{r}{w}\right)^2}$$

$$\text{Assim, } \Delta n = n_{NL} - n_0 \approx n_2 \cdot |\vec{E}_0|^2 \cdot e^{-2\left(\frac{r}{w}\right)^2}$$

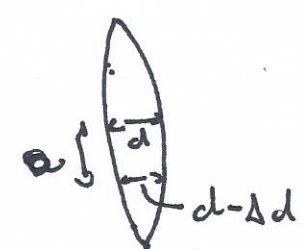
Vale ressaltar que, para todos os exemplos acima, a variação de n com r é muito pequena

Ex: fibra $\left| \frac{\Delta n}{n} \right| \approx 0.02$

mas, como $n \equiv n(r)$, temos que o atraso de fase também depende de r

$$\Phi(r) = k \cdot z = \frac{\omega \cdot \bar{z} \cdot n(r)}{c}$$

Assim, se n decresce quando r aumenta, o atraso de fase será maior no centro $r=0$ do que nos bordos, similar ao que ocorre em uma lente convergente:

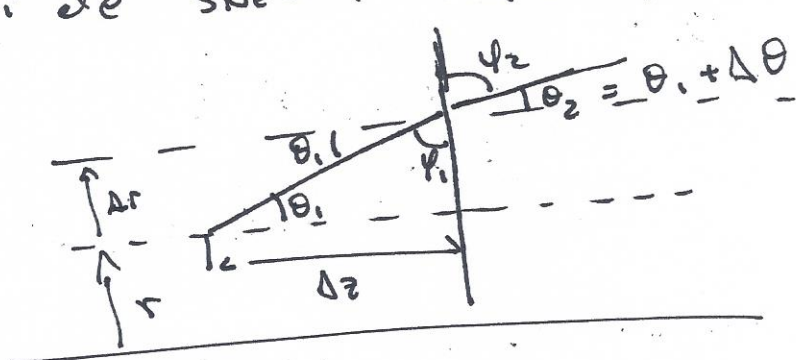


$$\Phi(r=0) = \frac{\omega d \cdot n}{c}$$

$$\Phi(r=a) = \frac{\omega n \cdot (d - \Delta d)}{c}$$

Por isso chamamos de meio "lenslike"

Para analisar a propagação de um ~~raio~~ meio paraxial por um meio contínuo e isotrópico vamos usar a lei de Snell: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$



$$\therefore n(r) \cdot \cos(\theta_1) = n(r + \Delta r) \cos(\theta_1 + \Delta \theta)$$

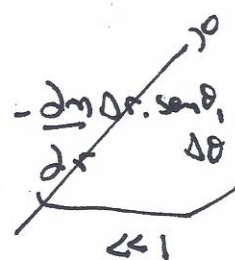
considerando ~~Δr << r~~ $\Delta r \ll r$ temos $\Delta n \ll n$

$$n(r) \cos \theta_1 = \left[n(r) + \left. \frac{dn}{dr} \right|_r \cdot \Delta r \right] \cdot (\cos \theta_1 \cos \Delta \theta - \sin \theta_1 \sin \Delta \theta)$$

tomando $\Delta\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\Delta\theta \approx 1$
 $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$

(39)

$$n(r) \cdot \cos\theta_1 = \left[n(r) + \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r \right] \cdot (\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \Delta\theta)$$

$$\cancel{n(r) \cos\theta_1} = \cancel{n(r) \cos\theta_1} - n(r) \sin\theta_1 \Delta\theta + \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r \cos\theta_1 - \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r \sin\theta_1 \Delta\theta$$


$$\therefore n(r) \sin\theta_1 \Delta\theta = \frac{\partial n}{\partial r} \Delta r \cos\theta_1$$

$$\text{ou } \frac{\partial n}{\partial r} = n(r) \cdot \text{tg}\theta_1 \cdot \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta r} \right)$$

da figura, como a aproximação é paraxial,

$$\text{tg}\theta_1 = \frac{\Delta r}{\Delta z} \Rightarrow$$

$$\text{tg}\theta_1 \cdot \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta r} \right) = \frac{1}{n(r)} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\Delta r}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta r} = \frac{\Delta\theta}{\Delta z}$$

Agora, no limite onde a radiação é infinitesimal,

$$\frac{1}{n(r)} \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{d\theta}{dz} \quad \text{mas} \quad \frac{dr}{dz} = \text{tg}\theta \approx \theta$$

↓
limite paraxial

$$\text{ou seja, } \frac{1}{n(r)} \frac{dn}{dr} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2 r}{dz^2}$$

↓
 $n \equiv n(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{n(r)} \frac{dn}{dr}} \rightarrow$$

Equação que descreve
 a propagação num
 meio com $n \equiv n(r)$

Vamos lembrar que a variação de n com o raio é geralmente pequena.

Por simetria, Δn deve ser o mesmo em r e em $-r$, portanto, podemos escrever.

$$n(r) = n_0 + \alpha \cdot r^2 + O(r^4) \dots$$

onde $|\alpha| \ll 1$

Ex: $n = n_0 + n_2 \cdot |\vec{E}|^2 \cdot e^{-2(\frac{r}{w})^2}$

$$\therefore n = n_0 + \underbrace{n_2 \cdot |\vec{E}|^2 \cdot \left(2 \frac{r^2}{w^2}\right)}_{\text{aquí, } l \text{ é um}} + \frac{1}{2!} \dots$$

de forma geral, vamos escrever

$$n = n_0 - \underbrace{\left(\frac{n_0}{2l^2}\right)}_{\text{aquí, } l \text{ é um}} r^2$$

grandezas com dimensão de distância e depende do sistema.

Com isso, na equação de propagação temos

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{n(r)} \cdot \frac{dn}{dr} = \frac{1}{\underbrace{n_0 - \frac{n_0}{2l^2} r^2}_{\ll n_0}} \cdot \left(\frac{-2 n_0}{2l^2} \cdot r \right)$$

$$\therefore \frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{n_0} \cdot \left(\frac{-n_0}{l^2} \right) \cdot r = -\frac{r}{l^2} \therefore$$

temos $\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{1}{l^2} r = 0$ $\left[r'' + \hat{\alpha}^2 r = 0 \right]$ (21)

cuja solução é

$$r(z) = r_1 \cdot \cos\left(\frac{z}{l}\right) + r_2 \cdot \sin\left(\frac{z}{l}\right)$$

$$r'(z) = -\frac{1}{l} r_1 \cdot \sin\left(\frac{z}{l}\right) + \frac{r_2}{l} \cos\left(\frac{z}{l}\right)$$

Agora, seja $r_1 = r(z=0)$ $r(0) = r_1$
 $r'_1 = r'(z=0)$ $\therefore r'_1(0) = \frac{r_2}{l} \therefore r_2 = r'_1 \cdot l$

e $r(z) = \cos\left(\frac{z}{l}\right) \cdot r_1 + l \cdot \sin\left(\frac{z}{l}\right) \cdot r'_1$

$$r'(z) = -\frac{1}{l} \cdot \sin\left(\frac{z}{l}\right) r_1 + \cos\left(\frac{z}{l}\right) \cdot r'_1$$

Assim, para uma propagação por uma distância d dentro deste meio, temos:

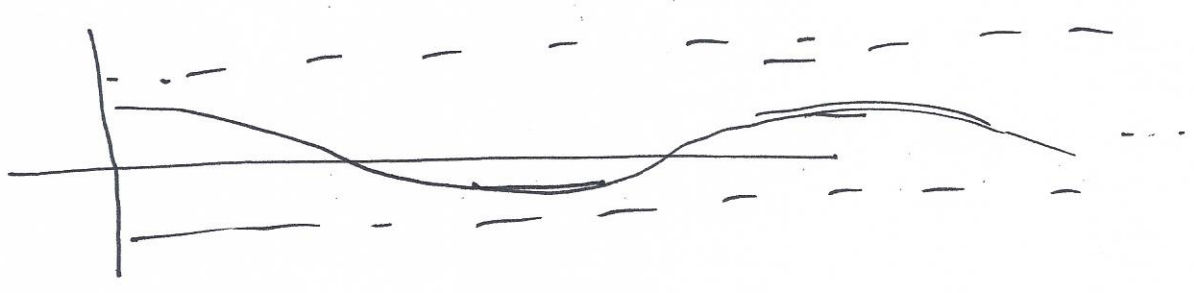
$$T = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{d}{l}\right) & l \sin\left(\frac{d}{l}\right) \\ -\frac{1}{l} \sin\left(\frac{d}{l}\right) & \cos\left(\frac{d}{l}\right) \end{pmatrix}$$

ou seja, o termo C da matriz ABCD
diz quanto a inclinação muda como função de r

veja que
$$C = -\frac{1}{l} \cdot \sin\left(\frac{z}{l}\right) \Rightarrow -\frac{1}{l} \leq C \leq +\frac{1}{l}$$

e varia com z , então o meio atua como um
lente com f variável: $f \rightarrow \frac{l}{\sin(\frac{z}{l})}$

Assim, para $n = n_0 - \frac{n_0}{2l^2} r^2$ a propagação é
tal que ~~o~~ ^{pode} ~~raio~~ ficar confinado no meio



Note que para Δn ser pequeno, l é grande,
com isso, se r_0 é grande, o raio não fica confi-
nado!

Por outro lado, temos a situação na qual
 $\Delta n > 0$, ou seja n cresce com r

Com isso $n = n_0 \pm n_0 \cdot \frac{1}{2L^2} \cdot r^2$ e ,

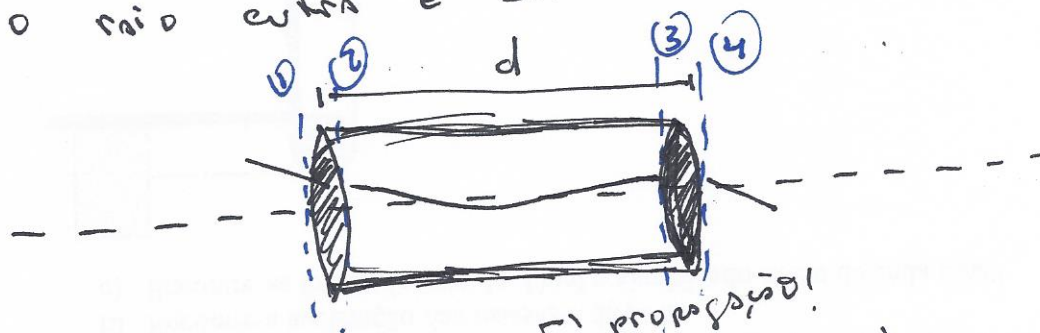
chamando $l = iL$ temos

$$n = n_0 + n_0 \frac{1}{2L^2} \cdot r^2$$

$$e \quad T = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{d}{L}\right) & L \sinh\left(\frac{d}{L}\right) \\ \frac{1}{L} \sinh\left(\frac{d}{L}\right) & \cosh\left(\frac{d}{L}\right) \end{pmatrix}$$

Com isso, independentemente de r_0 e r_0' , o feixe tende a "sair" do meio já que tanto $\cosh$ quanto $\sinh$ tendem ao infinito.

importante notar que as matrizes T descritos para os meios com $n \in \mathbb{R}$ só descrevem a propagação Neste meio. Se o raio entra e sai do meio temos



$$\begin{pmatrix} r_4 \\ r_4' \end{pmatrix} = \underbrace{T_{43}}_{\text{interface}} \underbrace{T_{32}}_{\text{propagação!}} \underbrace{T_{21}}_{\text{interface}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$