

## Feixes Gaussiano

(44)

Vamos voltar à equação de onda descrita no começo do curso, e vamos assumir uma onda propagando na direção  $z$ , de modo que a fase é  $e^{i(\omega t - kz)}$

A equação de onda é:

$$\nabla^2 \bar{E}' + k^2 \bar{E}' = 0$$

ou ainda  $(\nabla^2 + k^2) \bar{E}' = 0$

A solução para este problema é  $\bar{E}' = \bar{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Agora, vamos supor que a onda plana descrita acima seja "modulada" por uma função  $\psi(x, y, z)$  de modo que

$$\bar{E}' \rightarrow \bar{E}'(x, y, z) = \underbrace{\bar{E}_0 \cdot \psi(x, y, z)}_{\text{modulação}} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{i\omega t}$$

de modo que cada componente do campo  $\bar{E}$  pode ser escrito como:

$$\tilde{E}_* = \underbrace{\tilde{u}(x, y, z)}_{\text{escalar complexo!}} e^{-ikz}$$

Substituindo NA equação de ondas, temos para cada componente do campo:

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad \therefore$$

$$\nabla^2 E + k^2 E = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \cancel{k^2 \tilde{u}} - \cancel{k^2 \tilde{u}} = 0$$

$\therefore$  A equação de ondas torna-se

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0$$

Agora, vamos olhar para os termos da equação acima. Primeiramente,  $k = \frac{2\pi \cdot n}{\lambda}$  e um  $n$  muito grande para ondas ópticas ( $\lambda \sim \mu\text{m}$ ),  $k \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$

Além disso, a função  $\tilde{u}(x, y, z)$  deve variar muito mais em termos de  $y, x$  do que em relação à direção de propagação  $\Rightarrow \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right|$  ou  $\left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right|$   
uma vez que o feixe é fixado em  $x, y$  com dimensões diminutas! E em  $z$ ,  $\tilde{u}(x, y, z)$  varia muito pouco. com isso, temos que

$$\left| k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right|$$

Consequentemente, este termo pode ser desprezado e a equação de ondas torna-se (216)

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}}_{\nabla_t^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = 0$$

$\nabla_t^2 \Rightarrow$  Laplaciano transversal : opera apenas nas direções transversais à propagação!

com isso  $\nabla_t^2 \tilde{u}(\vec{s}, z) - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(\vec{s}, z)}{\partial z}$

$\vec{s}$  pode ser  $(x, y)$  ou  $(r, \theta)$ , em outras palavras,  $\vec{s}$  as coordenadas transversais à propagação.

Voltando ao uso de  $u(x, y, z) = E_0 \psi(x, y, z)$

temos a equação de ondas como

$$\nabla_t^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Note que  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  são muito maiores que  $\frac{\partial \psi}{\partial z}$

pois  $\psi(x, y, z)$  deve variar lentamente em  $z$ , mas, no entanto, lembramos que  $|k| \gg 1$  então, o termo  $k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}$  não pode ser desprezado.





Lembrando que a dependência em  $z$  é muito maior do termo que oscila rapidamente,

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} \approx \frac{\partial \psi_t}{\partial t} E_{0z} e^{ikz} + i k z \psi E_{0z} e^{ikz}$$

muito menor.

$$\therefore \frac{\partial E_z}{\partial z} \approx i k z E_z = i \frac{2\pi m}{\lambda} |E_z|$$

Agora,  $\nabla_t \vec{E}_t$  é a variação de  $E_t$  na direção transversal, assim, seja  $D$  o diâmetro transversal desse feixe

$$\nabla_t \vec{E}_t \approx \frac{|\vec{E}_t|}{D}$$

com isso,  $\frac{|\vec{E}_t|}{D} \approx \frac{2\pi m}{\lambda} |E_z|$  ou seja,

$$|E_z| \approx \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{1}{2\pi m} |\vec{E}_t|$$

Na região óptica  $\lambda \sim 1 \mu m$ . Para um feixe de  $\sim 1 mm$  de diâmetro,  $|E_z| \approx 10^{-4} |\vec{E}_t|$

portanto, a componente do campo que é paralela a  $z$  é muito menor que as componentes transversais. É essa aproximação TEM é muito precisa para os casos que estamos aqui.

Agora que já introduzimos o que são ondas TEM, vamos estudar os modos TEM.

inicialmente, o modo de mais baixa ordem é o TEM<sub>00</sub>. Como veremos adiante, a solução da equação

de onda 
$$\nabla_t^2 \psi - i k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

pode ser outros modos TEM que chamaremos TEM<sub>m,p</sub>

Por hora, vamos assumir que o feixe tem uma simetria cilíndrica em relação ao eixo  $\hat{z}$

Neste caso, o  $\nabla_t^2$  torna-se dependente de  $r$  e  $\phi$  das coordenadas cilíndricas. Mas como há a simetria, o feixe deve ser o mesmo independentemente de  $\phi$

com isso, 
$$\nabla_t^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Com isso, a equação de onda reduz-se a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - i k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Não vou provar, mas o tipo de equação acima sugere que a solução seja algo do tipo

$$\psi_0(r, z) = e^{i f(z, r)}$$

Usaremos para  $f(z, r)$  o chute inicial proposto no

Verdeyer:

$$f(z, r) = \left( P(z) + \frac{k \cdot r^2}{2 Q(z)} \right)$$

onde  $P(z)$  e  $Q(z)$  são funções a serem determinados.

Assumindo que

$$\psi_0(z, r) = e^{-i \left\{ P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)} \right\}}$$

↳ indica a solução cilíndricamente simétrica TEM<sub>0,0</sub>

temos  $\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -i \cdot \frac{kr}{q(z)} \cdot \psi_0 \therefore \frac{r \partial \psi}{\partial r} = -i \frac{kr^2}{q(z)} \psi_0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -i \frac{kr^2}{q(z)} \psi_0 \right)$$

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{-ikr^2}{q(z)} \cdot \psi_0(r, z) \right] \right] = \left[ -\frac{2ikr}{q(z)} \cdot \psi_0 - \frac{k^2 r^3}{q^2(z)} \cdot \psi_0 \right] \cdot \frac{1}{r}$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[ -i P'(z) + i \frac{kr^2 q'(z)}{2q^2(z)} \right] \psi_0$$

$$\therefore -\frac{2ik}{q(z)} \cdot \psi_0 - \frac{k^2 r^2}{q^2(z)} \cdot \psi_0 - 2ik \cdot \left( -i P'(z) + i \frac{kr^2 q'(z)}{2q^2(z)} \right) \psi_0 = 0$$

NÃO depende de r
depende de r<sup>2</sup>

com isso

$$\left\{ \left[ -\frac{2ik}{q(z)} - 2ik P'(z) \right] + \left[ -\frac{k^2}{q^2(z)} + \frac{k^2 q'(z)}{q^2(z)} \right] r^2 \right\} \psi_0 = 0$$

isso tem que ser solução p/ qualquer r e  $\psi_0 \neq 0$   
 com isso, cada termo entre [ ] deve ser nulo por si só!



ou seja,

$$\frac{-2ik}{q(z)} = zk P'(z) \Rightarrow$$

$$P'(z) = \frac{-i}{q(z)}$$

(5)

$$\frac{+kz}{q^2(z)} = \frac{kz}{q^2(z)} q'(z) \therefore$$

$$q'(z) = 1$$

A solução p/  $q(z)$  é simples:

$$q(z) = q_0 + z$$

Agora,  $q_0$  tem unidade de distância! mas quem é  $q_0$ ?

Note que  $z$  é uma distância física, portanto, um número real. Se  $q_0$  for um número real, temos:

$$\psi_0(z, r) = e^{-iP(z)} \cdot \underbrace{e^{-i\left[\frac{k r^2}{2(q_0+z)}\right]}}_{\text{puramente fase!}}$$

ou seja,  $|e^{-i\left[\frac{k r^2}{2(q_0+z)}\right]}| = 1$  independentemente de  $r$

o que não faz sentido físico!

Com isso  $q_0 = q_{0r} + i q_{0i}$  mas  $q_{0r}$  só daria uma fase e pode ser feito nulo então  $q_0 = i q_{0i} = i z_0$

com isso

$$q(z) = z + i z_0$$

Assim,  $\psi_0(z, r) = e^{-i\left(\frac{k r^2}{2(z + i z_0)}\right)} \cdot e^{-iP(z)}$

$$e^{-\frac{1}{z + i z_0}} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \therefore$$



$$\psi_0(r, z) = \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k z_0}{z^2 + z_0^2} \right) r^2}}_{\text{Amplitude!}} \cdot e^{-\frac{i}{2} \cdot \left( \frac{k z \cdot r^2}{z^2 + z_0^2} \right)} \cdot e^{-i P(z)} \quad (52)$$

Se  $z=0$  -> o primeiro termo torna-se:

$$e^{-\frac{1}{2} \frac{k}{z_0} r^2} \therefore \text{definimos } \boxed{w_0^2 = \frac{z z_0}{k}} \quad \boxed{\frac{\lambda z_0}{\pi w_0^2}}$$

de modo que, se, em  $z=0$ ,  $r = w_0 \therefore$  A Amplitude cai a  $e^{-1}$  pois  $e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$ .

Chamamos  $w_0$  de "tamanho do ponto" ou spot size  
Em uma tradução livre horrível!

Note que se  $z \neq 0$   $r > w_0$  p/ que  $e^{-1} \therefore w_0$  e o menor valor possível para o "spot size".

para um dado  $z$  temos

$$w(z) = \frac{z}{k z_0} \cdot (z^2 + z_0^2) = \frac{z z_0}{k} \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$

sendo  $z_0 = \frac{w_0^2 \cdot \pi \lambda}{2}$ , temos

$$w(z) = \frac{z \cdot \frac{w_0^2 \cdot \pi \lambda}{2}}{\frac{\lambda \cdot z \pi n}{2}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\frac{\lambda}{\pi n w_0^2} \cdot z}{1} \right)^2 \right] = w_0^2 \cdot \left( 1 + \left[ \frac{\lambda z}{\pi n w_0^2} \right]^2 \right)$$

o segundo termo exponencial  $e^{-i}$ :

$$e^{-i \left( \frac{k z}{z(z^2 + z_0^2)} \cdot r^2 \right)} \text{ e definimos } R(z) = \frac{1}{z} (z^2 + z_0^2)$$

$$R(z) = z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right) = z \left( 1 + \left( \frac{\pi n w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right)$$

Com isso,

$$\psi_0(r, z) = e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} \cdot e^{-i \frac{k r^2}{2z(z)} - i P(z)}.$$

e  $P(z)$  é tal que  $P'(z) = \frac{-i}{g(z)} = -\frac{i}{z + iz_0}$

$$\therefore i P'(z) = \frac{1}{z + iz_0} \therefore i P(z) = \int_0^z \frac{1}{z + iz_0} dz$$

$$= \boxed{i P(z) = \ln(z + iz_0) - \ln(iz_0)}$$

Assim  $i P(z) = \ln\left(1 - i \frac{z}{z_0}\right)$

Agora, um  $z$  imaginário  $A + iB = (A^2 + B^2)^{1/2} e^{-i\varphi}$  onde  $\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right)$

com isso,  $i P(z) = \ln\left[\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^{1/2} e^{-i\varphi}\right] = \ln\left[\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^{1/2}\right] - i\varphi$

$$\therefore i P(z) = \ln\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2} - i \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Na solução precisamos de:  $e^{-i P(z)}$

$$e^{-i P(z)} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}} e^{i \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)}$$

Com isso a função evolutiva, com simetria cilíndrica, a que é solução da equação de ondas é

(54)

$$\psi_0(z, r) = \underbrace{\frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-i[kz - \frac{\pi}{2}(\frac{z}{z_0})]}}_{\text{fase longitudinal}} \cdot \underbrace{e^{-i \frac{k r^2}{2 z(z)}}}_{\text{fase radial}}$$

Com isso, a componente  $E(x, y, z)$  é dada por:

$$E(x, y, z) = E_0 \cdot \left[ \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}} \right] \cdot \left[ e^{-i[kz - \frac{\pi}{2}(\frac{z}{z_0})]} \right] \cdot \left[ e^{-i \frac{k r^2}{2 z(z)}} \right]^{(x^2+y^2)}$$

Note que se  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  cresce, então  $E$  diminui.  
 o fator  $w(z)$  dá a escala e a diminuição de  $E$ .

A fase em  $z$  não é só " $ikz$ " não! surge um termo  $\frac{\pi}{2}(\frac{z}{z_0})$

A fase radial cresce com o quadrado de  $r$

Vamos ver o significado físico de cada um dos termos acima.

~~Vamos~~

Com a equação da envoltória, podemos escrever o campo elétrico como:

(55)

$$E(x, y, z) = E_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2} e^{-i\left(kz - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_0}\right)\right)} e^{-i \frac{k r^2}{2 z(z)}} \cdot e$$

No qual :  $w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) = w_0^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{z_0 z}{\pi m w_0^2}\right)^2\right)$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) = z \left(1 + \left(\frac{\pi m w_0^2}{2 z}\right)^2\right)$$

$$z_0 = \frac{\pi m w_0^2}{\lambda}$$

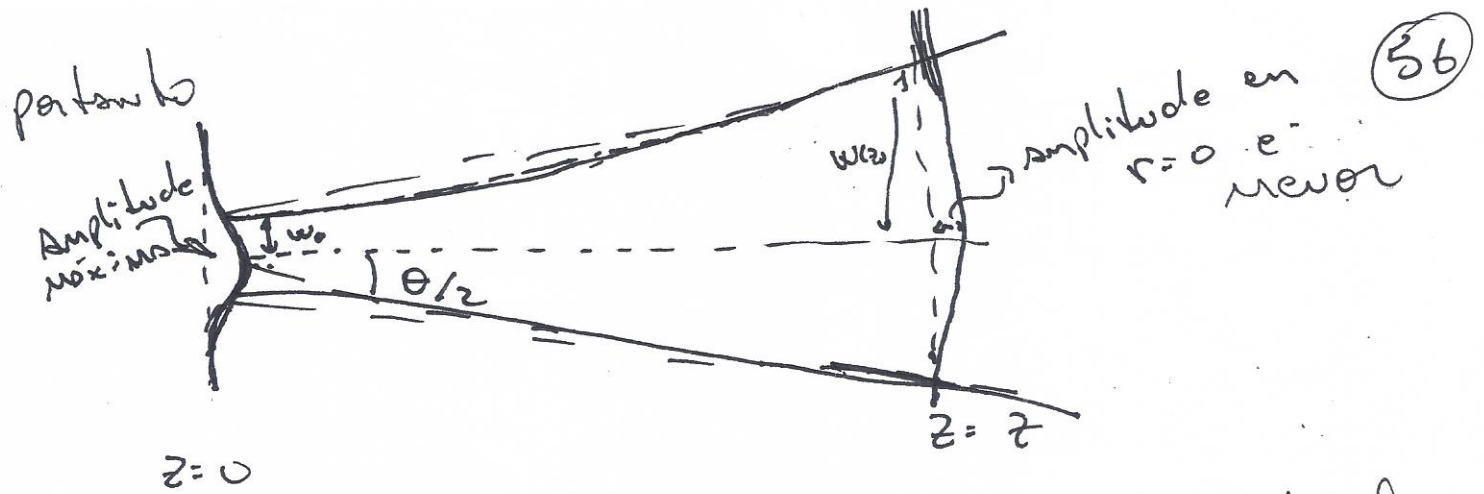
Vamos olhar o termo de Amplitude:

$$\left| \frac{E(x, y, z)}{E_0} \right| = \frac{w_0}{w(z)} \cdot e^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2}$$

Como escrevi o  $| |$ , os termos de fase somem!

Note que, para  $r=0$ , a Amplitude do campo é máxima!  
 e vale  $\frac{w_0}{w(z)}$ , mas  $w(z)$  é sempre  $\geq w_0$ , portanto,  
 o ponto de maior amplitude do campo é  $r=0$  e  $z=0$   
 e  $w_0$  é a largura mínima do feixe e, definimos  $z=0$   
 o ponto no qual  $w = w_0$ .





Note que essa diminuição da amplitude máxima do feixe respeita a conservação de energia transferida <sup>por tempo</sup> pelo feixe, ou seja, sua potência!

Lembremos que a intensidade de um campo  $\vec{E}$  e-

dado por:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

e potência e- dada por  $P = \int I dA$  :

$$P = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \int E^* E dA = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w^2(z)} \int_0^{z_0} \int_0^\infty e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} r dr d\phi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot c \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w^2(z)} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r^2}{w^2}} dr = \pi c \epsilon_0 E_0^2 \frac{w_0^2}{w^2} \cdot \frac{w^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot c \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{w^2(z)} \cdot \frac{w^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot c \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{4} = \frac{\pi}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{w_0^2}{2}$$

$$\therefore P = \pi \cdot c \epsilon_0 E_0^2 \frac{w_0^2}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{E_0^2}{\eta} \cdot w_0^2 = \text{constante!}$$

$$\eta = \left( \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{1/2}$$

impedância do meio!

ou seja, a potência transmitida é constante

(57)

Note também que se  $z \gg z_0$  então

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \gg 1 \therefore w^2 \approx w_0^2 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow w \approx \frac{w_0}{z_0} \cdot z = \frac{d_0}{2\pi n w_0} \cdot z \therefore p/ z \gg z_0 \quad w \text{ cresce}$$

linearmente com  $z$ . e com "inclinação" de  $\frac{1}{z_0}$  ou  $\frac{1}{w_0}$

ou seja, quanto maior  $w_0$ , como vimos no capítulo 1, menos o feixe diverge. também é verdade p/  $z_0$ .

ou seja,  $z_0$  define quão rápido o feixe diverge.

e, se  $z = z_0$  então  $w(z_0) = \sqrt{2} z_0$

$$\frac{\theta}{z} = \frac{dw}{dz} = \frac{d_0}{2\pi n w_0}$$

Vamos observar a fase longitudinal

$$\phi = kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$$k = \frac{\omega n}{c}$$

Como já vimos, para uma onda plana  $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega z}{kz}$   
fase

$$\therefore \text{posso definir } v_f = \left(\frac{\phi}{\omega z}\right)^{-1}$$

para um feixe GAUSSIANO a velocidade de propagação

$$v_f = \frac{c/n}{1 - \frac{d_0}{2\pi n z} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)} \approx \frac{c}{n}$$

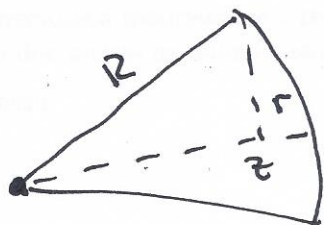
mas note que há uma pequena diferença!

## fase radial

38

O último termo  $e^{-i \frac{k r^2}{2 R(z)}}$  ! Note que se  $z = \text{const.}$ ,  $R(z) = \text{const.}$ , pois a fase em um dado  $z$  NÃO é constante ! Em outras palavras o plano  $x, y$  definido por um dado  $z$  NÃO é uma superfície equifase !

Para entender a superfície equifase, vamos ~~ser~~ considerar uma fonte pontual.



Neste caso, a fase é  $e^{-i k \cdot R}$

$$\text{onde } R^2 = r^2 + z^2 = z^2 \left( 1 + \frac{r^2}{z^2} \right) \therefore R = z \cdot \left( 1 + \frac{r^2}{z^2} \right)^{1/2}$$

A uma distância  $z$  muito grande temos:

$$R \approx z \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{z^2} \right) \approx \underbrace{z}_{\text{termo qd } z \gg R} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{z}$$

e a fase torna-se:

$$e^{-i k \cdot z} \cdot \underbrace{e^{-i k \frac{r^2}{2 z}}}_{\text{Note a semelhança!}}$$

Note a semelhança!

A diferença é que na fase radial da gaussiana  $R \rightarrow R(z)$

$$\text{e varia como: } R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$



ou seja, para cada ~~plano~~ <sup>posição</sup>  $z$ , a frente de onda (59) é esférica com  $R(z) > z \therefore$  A "fonte pontual" está atrás de  $z=0$  se aproximando de  $z=0$  quando  $z \rightarrow \infty$ .  
 Por outro lado, se  $z=0$  temos

$$R(z=0) = \left( z + \frac{z_0^2}{z} \right) \rightarrow \infty \text{ portanto,}$$

$z=0$  é o único plano no qual a frente de onda é plana.

### Modos de ORDENS $\neq 0,0$

A solução apresentada acima ocorre apenas quando há simetria cilíndrica no problema!

Agora, se não for imposto que  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  a solução da equação de onda é mais complexa, mas ainda tem similitudes com a solução GAUSSIANA!

Para o caso em que  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \neq 0$ , é mais intuitivo escrever o problema em  $(x, y, z)$  de modo que  $\psi_{0,0}$  torne-se:

$$\psi_{0,0}(x, y, z) = \frac{\omega_0}{\omega(z)} \cdot e^{-\left(\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right)} \cdot e^{-i\left(kz - \arg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)} \cdot e^{-j\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}}$$



chamando o caso geral de  $\psi_{m,p}$  onde  $m, p = 0, 1, 2, \dots$

A solução p/ ~~este~~ ~~este~~ ~~este~~ o problema geral pode ser escrito como:

$$\psi_{m,p}(x, y, z) = \underbrace{H_m\left(\frac{\sqrt{z} x}{w(z)}\right)}_{\text{Amplitudes}} \underbrace{H_p\left(\frac{\sqrt{z} y}{w(z)}\right)}_{\text{Amplitudes}} \underbrace{e^{+i(m+p) \cdot \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)}}_{\text{fase longitudinal}} = \psi_{0,0}(x, y, z)$$

onde os termos de amplitude são dados por:

$$H_m(u) = (-1)^m e^{u^2} \cdot \frac{d^m e^{-u^2}}{du^m}$$

polinômios de Hermite

Alguns exemplos de  $H_m(u)$  são:

$$H_0(u) = (-1)^0 \cdot e^{u^2} \cdot e^{-u^2} = 1$$

$$H_1(u) = (-1)^1 \cdot e^{u^2} \cdot \frac{d}{du} e^{-u^2} = -1 \cdot e^{u^2} \cdot (-2u) \cdot e^{-u^2} = 2u$$

$$\begin{aligned} H_2(u) &= (-1)^2 \cdot e^{u^2} \cdot \frac{d^2}{du^2} e^{-u^2} = 1 \cdot e^{u^2} \cdot [-2e^{-u^2} + 4u^2 e^{-u^2}] \\ &= -2(1 - 2u^2) = 2(2u^2 - 1) \end{aligned}$$

e como isso interfere no "formato" do feixe (6)

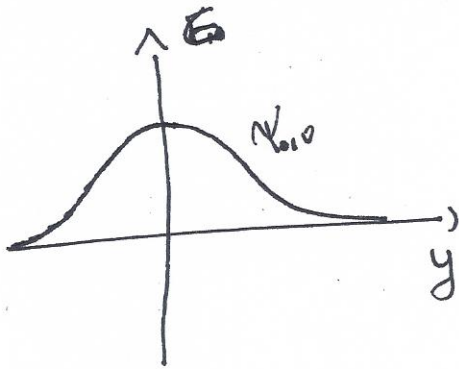
Vamos ver, por exemplo os casos:  $TEM_{1,0}$ ;  $TEM_{2,0}$   
 $TEM_{1,1}$ .

... pode ser observado em  $E_0$

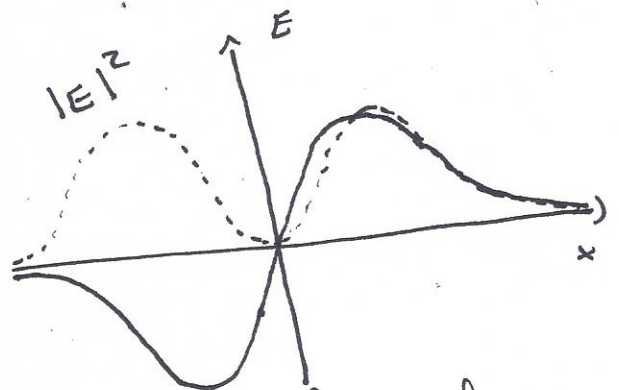
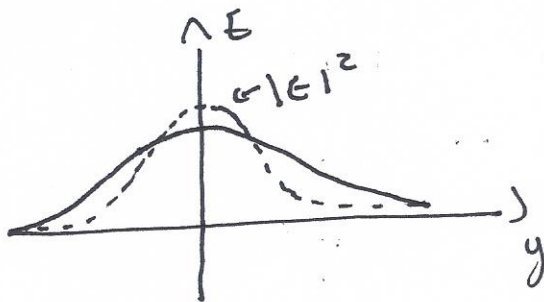
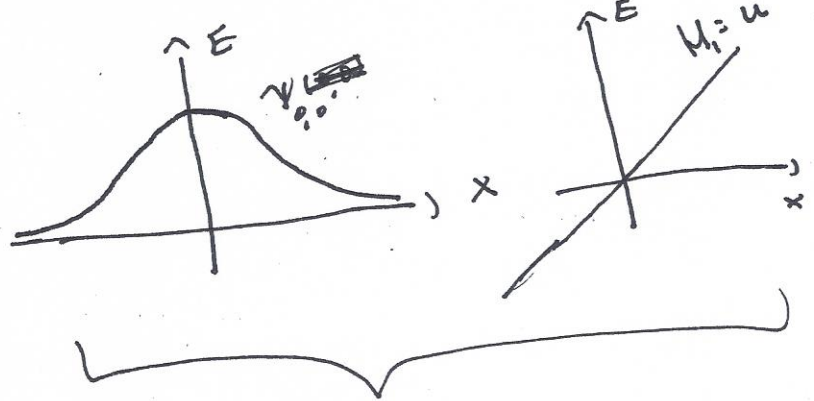
2/  $TEM_{1,0}$  temos  $M_1 = 2u = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{2}}$

$$M_0 = 1$$

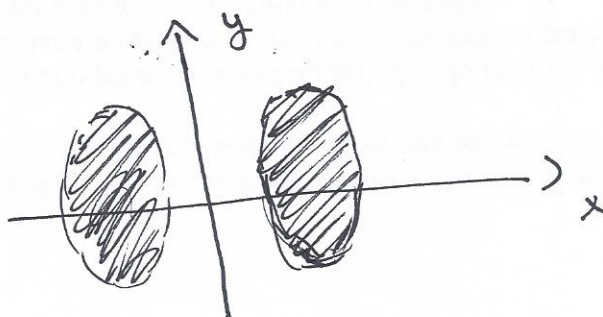
No ~~eixo~~ eixo  $y$  temos:



No eixo  $x$  temos.



ou seja, se olharmos a mancha que esse feixe faz num anteparo, temos (observamos a intensidade  $I \propto |E|^2$ )



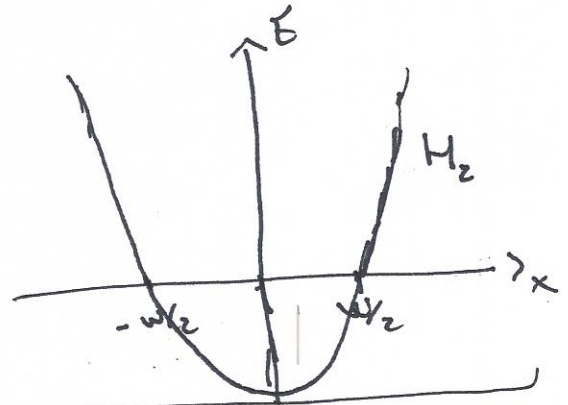
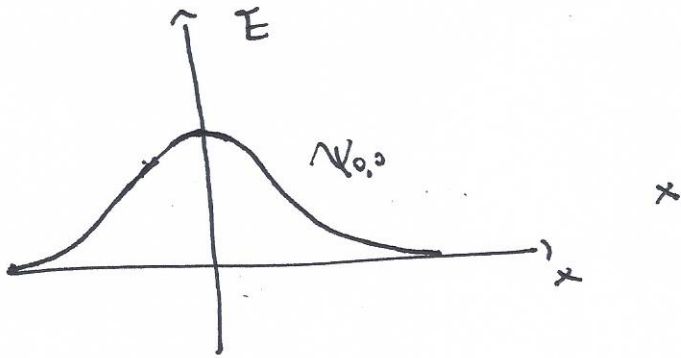
ou seja, temos duas manchas em  $x$ .

P/ TEM<sub>2,0</sub> temos

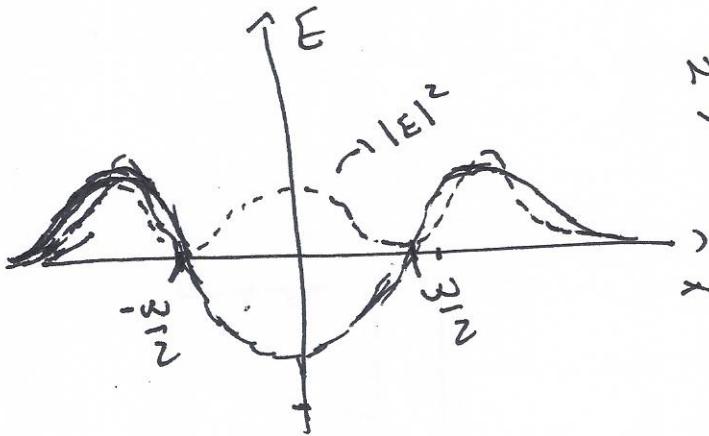
em y é idêntico ao anterior.

em x, portanto  $H_2\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{w^2} - 1 = \frac{4x^2}{w^2} - 1$

$\Rightarrow H_2(x) = 0$  se  $\boxed{x = \pm \frac{w}{\sqrt{2}}}$

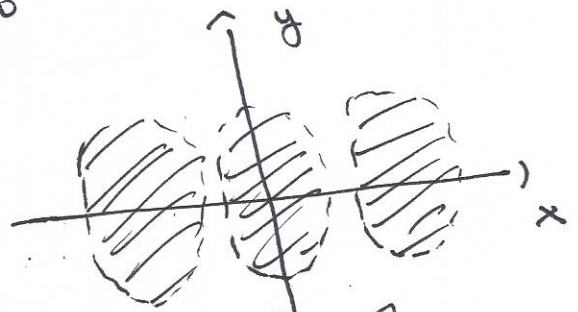


O resultado é:



No anteparo  
veremos:

$\Rightarrow$

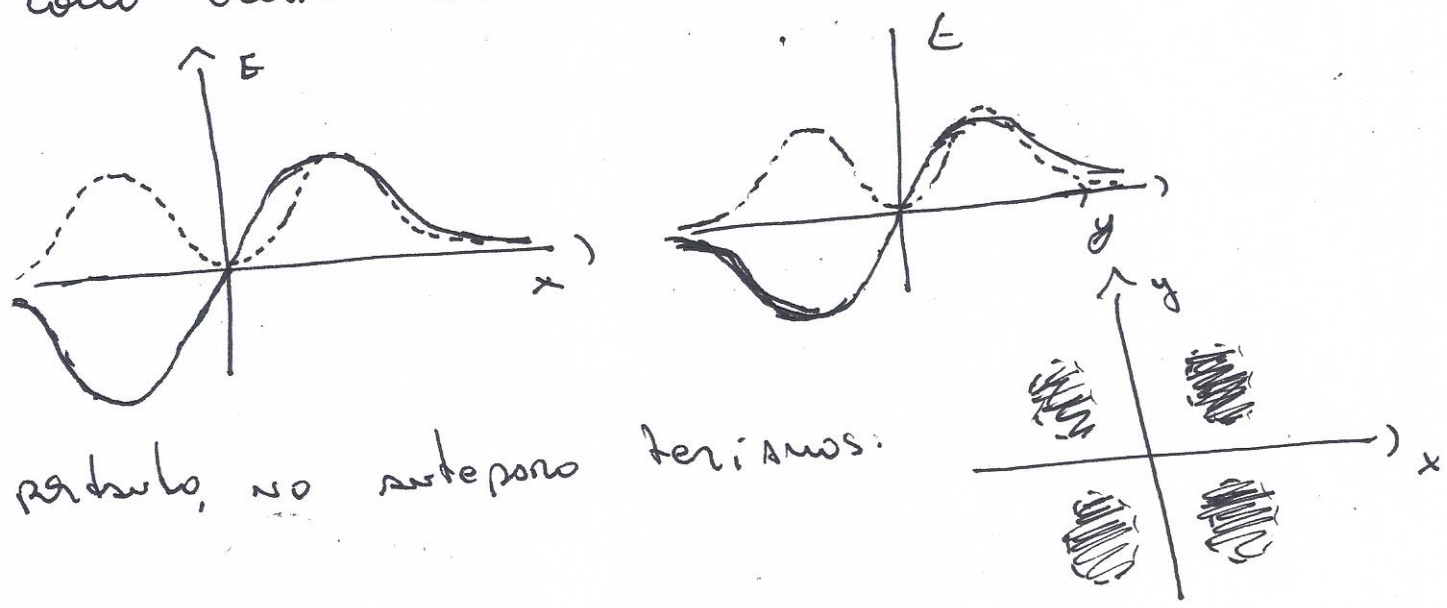


3 manchas na dire-  
ção x

ou seja, note que o índice  $m$  indica o número de "valões" entre picos observados no anteparo, ou ainda, podemos dizer que existem  $m+1$  picos.



Agora, vamos ver o caso  $TEM_{1,1}$ , neste caso, como ocorre com o eixo x e o  $TEM_{1,0}$ , temos



partido, no anteparo teríamos:

Note, contudo, que não importa a ordem de  $m, p$ , mas o termo  $e^{-\frac{r^2}{w^2}}$  tem o mesmo  $w(z)$ ! Mas veja que quando mais alto o valor de  $m(p)$ , mais alongado está o feixe e partido, maior o seu tamanho transversal.

Aqui é importante mencionar que o modo que vai oscilar na cavidade depende muito da cavidade, e da presença de defeitos nessas, por exemplo.

Agora, outra forma de desviar do cilindricamente simétrico é quando  $w_0$  é diferente em  $\hat{x}$  e em  $\hat{y}$ .

Neste caso, vamos escrever

$$E_{0,0}(x,y,z) = E_0 \cdot \psi_{0,0}(x,y,z) = E_0 \cdot \frac{w_0^*}{w(z)} \cdot e^{-i(kz - \phi(z) - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{-\frac{x^2}{w_x^2(z)}} \cdot e^{-\frac{y^2}{w_y^2(z)}} \cdot e^{-i \frac{kx^2}{2R(z)}} \cdot e^{-i \frac{ky^2}{2R(z)}}$$

Se  $w_{0x} \neq w_{0y}$ , temos  $w_x(z) = w_{0x} \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2}$

$$w_y(z) = w_{0y} \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2}$$

com  $R(z) = z \sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2}$ , ~~dm~~ varia com  $x, y$  pois

$$z_{0x} \neq z_{0y} \dots R_{x,y}(z) = z \left( 1 + \left( \frac{z_{0x,y}}{z - z_{x,y}} \right)^2 \right)$$

onde  $z_{0x,y} = \frac{\pi m w_{0x,y}^2}{2\omega}$   
 $z = x, y$

$z_x$  e  $z_y$  são as posições em  $z$  onde temos  $w_{0x}$  e  $w_{0y}$

com isso  $E_0(x, y, z) = E_0 \cdot \frac{\sqrt{w_{0x} w_{0y}}}{\sqrt{w_x(z) w_y(z)}} \cdot e^{-ikz} e^{-\frac{1}{2} \lg^{-1} \left( \frac{z - z_x}{z_{0x}} \right) - \frac{1}{2} \lg^{-1} \left( \frac{z - z_y}{z_{0y}} \right)}$

fase longitudinal

$$\times e^{-i \left[ kz - \frac{1}{2} \lg^{-1} \left( \frac{z - z_x}{z_{0x}} \right) - \frac{1}{2} \lg^{-1} \left( \frac{z - z_y}{z_{0y}} \right) \right]}$$

$$\times e^{-\frac{x^2}{w_x^2(z)}} \times e^{-\frac{-ik x^2}{2R_x(z)}}$$

termo que varia em  $x$

$$\times e^{-\frac{y^2}{w_y^2(z)}} \times e^{-\frac{-ik y^2}{2R_y(z)}}$$

termo que varia em  $y$