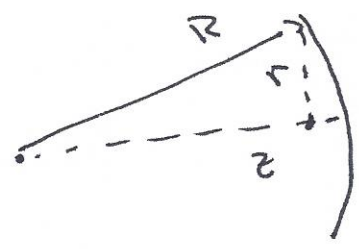


Vamos agora investigar como a lei ABCD pode ser aplicada para feixes gaussianos!

Primeiro, vamos lembrar como escrevemos o feixe gaussiano (TEM₀₀)

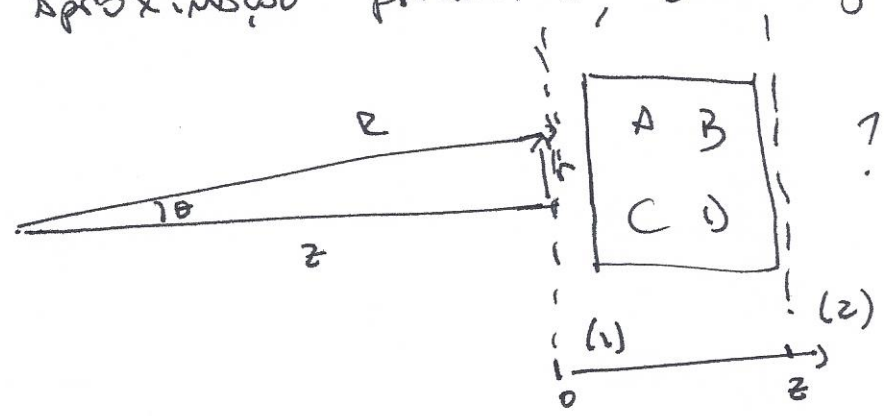
$$E = E_0 \cdot e^{-iP(z)} \cdot \underbrace{e^{-i\left(\frac{kr^2}{2q(z)}\right)} \cdot e^{-ikz}}_{\text{similar a onda esférica!}}$$

Lembrando:



$$\therefore e^{-ikR} \approx e^{-ikz} \cdot e^{-i\frac{kr^2}{2R}}$$

Para aplicar a matriz ABCD a um feixe gaussiano vamos primeiro ver o caso de uma onda esférica na aproximação paraxial, ou seja $z \gg r$ na figura



Sabemos que

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix}$$

$$\therefore r_2 = Ar_1 + r_1' B$$

$$r_2' = Cr_1 + r_1' D$$

66

Agora, na aproximação paraxial temos:

$$r' = \frac{dr}{dz} = \lg \theta \approx \sin \theta \approx \frac{r}{R}$$

então,

$$r_z = A \cdot r_1 + B \frac{r_1}{R_1}$$

$$\frac{r_z}{R_z} = C \cdot r_1 + D \frac{r_1}{R_1}$$

dividindo a razão entre estas duas equações

temos:

$$R_z = \frac{A \cdot R_1 + B}{C \cdot R_1 + D}$$

Agora, na equação da Gaussiana $q(z)$ é o equivalente de R , (Note, lembra que $q(z)$ é imaginário enquanto R é real)

Com isso, posso reescrever:

$$q(z) = \frac{A \cdot q_1 + B}{C \cdot q_1 + D}$$

onde ABCD são os elementos típicos de uma matriz ABCD!

Exemplo: sabemos que $q(z) = z + iz_0$

Se $q(z_1) = z_1 + iz_0 \quad \therefore \quad q(z_2) = z_2 + iz_0$ (z_1 e z_2 no mesmo meio isotrópico)

A matriz ABCD p/ um deslocamento $d = z_2 - z_1$

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \\ C & D \end{pmatrix} \therefore$$

(67)

com isso $q(z_2) = \frac{\overbrace{1}^A \cdot q(z_1) + \overbrace{z_2 - z_1}^B}{\underbrace{0}_C \cdot q(z_1) + \underbrace{1}_D} \therefore$

$$q(z_2) = q(z_1) + z_2 - z_1 = \cancel{z_1} + iz_0 + z_2 - \cancel{z_1} = z_2 + iz_0$$

Nós já vimos que

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} = \boxed{\frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda_0}{\pi \eta \omega^2(z)}}$$

As vezes é mais intuitivo trabalhar com $1/q$ de modo que temos

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1}$$

exemplo: se $q_1 = q(0) \therefore q_1 = iz_0$ e propagamos pelo espaço livre "z" $\therefore$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{\cancel{0} + \cancel{1/iz_0}}{\cancel{0} + \cancel{1/iz_0}} = \frac{0 + 1/iz_0}{1 + z/iz_0} = \frac{\cancel{1}}{z + iz_0}$$

ou ainda $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda_0}{\pi \eta \omega^2(z)}$

outro exemplo: vamos colocar uma lente fina com distância focal f no plano $z=0$ do feixe gaussiano propagando no ar $n=1$ (68)

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{C + D/q_1}{A + B/q_1} \quad \text{e} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \therefore$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1 + 0} \therefore \frac{1}{q(z)} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}$$

Se a lente foi posta em $z=0$ $\therefore \frac{1}{q_1} = \frac{1}{iz_0} = -i \frac{2\sigma}{\pi \omega_0^2}$

$$\therefore \frac{1}{q(z)} = -\frac{1}{f} - i \frac{2\sigma}{\pi \omega_0^2} \equiv \frac{1}{R(z)} - i \frac{2\sigma}{\pi \omega(z)^2}$$

Assim como fizemos para blocos de raio, se existem N elementos entre o plano (1) e (N) então,

$$T = \begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix} \dots \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

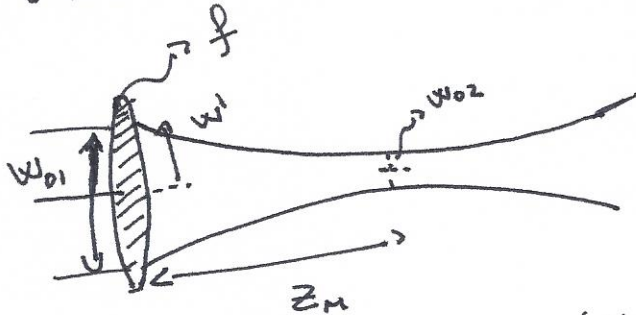
e

$$q_N = \frac{A_T q_1 + B_T}{C_T q_1 + D_T} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{q_N} = \frac{C_T + D_T/q_1}{A_T + B_T/q_1}$$

um exemplo muito importante em lasers e- calcula (69)
 a ~~distância~~ focal e o spot size no foco da lente
 posição

colocada num feixe GAUSSIANO.

PRIMEIRO, VAMOS ASSUMIR que a lente foi colocada no
 plano onde $w(z=1) = w_0$ $\therefore R_1 \rightarrow \infty$



A matriz será uma ~~propagação~~ lente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$ e uma propagação no ar:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/f & z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

Assim: $\frac{1}{q(z)} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1 - \frac{z}{f} + \frac{z}{q_1}}$

mas $q_1 = i z_{10}$

$$\Rightarrow \frac{1}{q(z)} = \frac{-\frac{1}{f} - \frac{i}{z_{10}}}{1 - \frac{z}{f} - i \frac{z}{z_{10}}} = \left(-\frac{1}{f} - \frac{i}{z_{10}} \right) \times \left[\frac{1 - \frac{z}{f}}{\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{10}} \right)^2} + i \frac{\frac{z}{z_{10}}}{\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{10}} \right)^2} \right]$$

$$= \frac{\frac{z}{f^2} - \frac{1}{f} + \frac{z}{z_{10}^2}}{\left[\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{10}} \right)^2 \right]} - i \frac{\left(\frac{1}{z_{10}} - \frac{z}{z_{10}f} + \frac{z}{z_{10}f} \right)}{\left[\left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + \left(\frac{z}{z_{10}} \right)^2 \right]}$$

(70)

$$e \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i d_0}{\pi w^2(z)}$$

$$\therefore \frac{1}{R(z)} = \frac{-1/f + z \left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_0^2} \right)}{\left[\left(1 - z/f \right)^2 + \left(z/z_0 \right)^2 \right]}$$

$$\frac{d_0}{\pi w^2(z)} = \frac{\frac{1}{z_0}}{\left(1 - z/f \right)^2 + \left(z/z_0 \right)^2} \therefore$$

$$w^2(z) = \left[\frac{\left(1 - z/f \right)^2 + \left(z/z_0 \right)^2}{\cancel{z_0}} \right] \cdot \frac{\pi \cdot z_0}{\cancel{z_0}}$$

Note que $w(z) > 0$ $\forall$ qualquer z !

Se $w \neq 0$, qual o mínimo w ?

$$\text{fazendo } \frac{d^2 w^2}{dz} = \frac{z_0 \cdot \pi}{d_0} \cdot \left[z \cdot \left(-\frac{1}{f} \right) \cdot \left(1 - z/f \right) + \frac{z z}{z_0^2} \right] = 0$$

$$\therefore \boxed{z_{\text{minimo}} = \frac{f}{1 + \left(f/z_0 \right)^2}}$$

Note que o valor mínimo de $w(z)$ não ocorre p/ $z = f$ mas sim p/ um z um pouco menor que f !

Lembre que z_0 tipicamente $e^- \sim 10^3 \text{ m} \therefore \frac{f}{z_0} \ll 1$ em muitos casos.

Assumindo que $z_{10} \gg f$ e $z_{\min} \approx f$, temos (71)

que $w(z_{\min}) = w_{z_0}^2$ e $\cdot$ ~~é~~ dado por:

$$\frac{1}{w_{z_0}^2} \approx \frac{\pi}{d_0} \cdot \frac{1}{z_{10}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{f}{z_{10}}\right)^2 + \left(\frac{f}{z_{10}}\right)^2} \approx \frac{\pi}{d_0} \cdot \frac{z_{10}}{f^2}$$

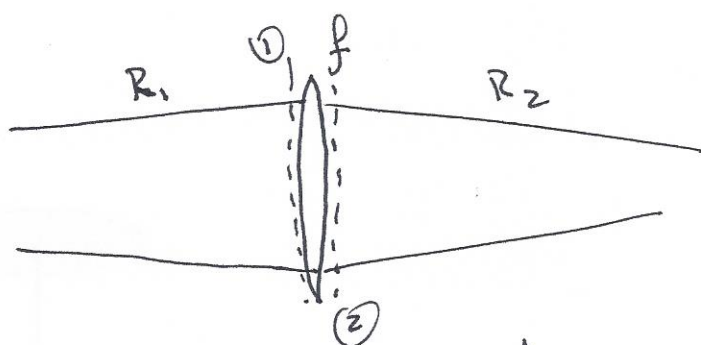
$$\therefore w_{z_0}^2 \approx \frac{d_0 \cdot f^2}{\pi z_{10}} \quad \text{mas} \quad z_{10} = \frac{\pi w_{01}^2}{\lambda_0} \therefore$$

$$w_{z_0}^2 \approx \frac{d_0^2 \cdot f^2}{\pi^2 \cdot w_{01}^2} \Rightarrow \boxed{w_{z_0} = \frac{d_0 \cdot f}{\pi w_{01}}}$$

Note que w_{z_0} é inversamente proporcional a w_{01} !

Agora, o que ocorre se a lente NÃO é colocada no ponto z_{10} , mas sim em qualquer ponto z_1 no qual

$R_1 \neq \infty$



Assumindo a lente fixa temos:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \therefore$$

$$q_2^{-1} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1 + 0} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{q_2} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{R_1} - i \frac{n_0}{\pi \omega_1^2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{n_0}{\pi \omega_2^2}$$

ou seja, $\omega_2 = \omega_1$ e

$$\boxed{\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}}$$

dependendo de R_1 , a lente não irá focalizar o feixe gaussiano! Se $\underline{R_1 < f} \Rightarrow R_2 \geq 0$ e o feixe continua divergindo mas com um $\frac{dr}{dz}$ menor.

Por fim, usando o feixe em (2) pode-se calcular a nova posição focal e ω_{20} [fica como exercício!]

Note também que podemos propagar o feixe gaussiano por um meio que $n \equiv n(r)$!

Assumindo que $n = n_0 - \frac{n_0}{2L^2} r^2$ (como no cap. II)

temos que

$$\nabla^2 E - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2(r) E = 0$$

$$\nabla_t^2 E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \cancel{m_0^2} \left[1 - \frac{2 \cdot r^2}{2l^2} + \frac{r^4}{4l^4} \right] E = 0$$

$\therefore$ Assumindo $E(x, y, z) = \psi(x, y, z) \cdot e^{-k_0 z} \therefore$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{-k_0 z} - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} e^{-k_0 z} - k_0^2 \psi(x, y, z) \cdot e^{-k_0 z}$$

Note que p/ a onda plana $e^{-k_0 z}$ e NAO e

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \cdot m_0 \quad k = \frac{\omega}{c} \cdot m(r)$$

pois se $k = k(r)$ NAO e onda plana!

$$\therefore \nabla_t^2 \cancel{\psi e^{-ik_0 z}} + \frac{\partial^2 \cancel{\psi e^{-ik_0 z}}}{\partial z^2} - 2ik_0 \frac{\partial \cancel{\psi e^{-ik_0 z}}}{\partial z} - k_0^2 \cancel{\psi e^{-ik_0 z}} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \cdot m_0^2 \cdot \frac{r^2}{l^2} \right] \cancel{\psi e^{-ik_0 z}} = 0$$

Varia pouco com z !

$$\therefore \nabla_t^2 \psi - 2ik_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\omega^2 m_0^2}{c^2} \frac{r^2}{l^2} \psi - i \left(P(z) + \frac{k_0}{2q(z)} r^2 \right)$$

$\therefore$ Se assumimos que $\psi \equiv e$

como antes, temos:

$$\left(\frac{1}{q} \right)^2 + \left(\frac{1}{q} \right)' + \frac{1}{l^2} = 0$$

Chamando

$$\frac{1}{q} = \frac{S'}{S} \quad \text{denos}$$

(74)

$$\frac{\cancel{S'^2}}{S^2} + \frac{S''}{S} - \frac{\cancel{S'^2}}{S^2} + \frac{1}{l^2} = 0 \quad \therefore \quad S'' + \frac{S}{l^2} = 0$$

Sabemos que a solução é $S = a \cdot \cos\left(\frac{z}{l}\right) + b \sin\left(\frac{z}{l}\right)$

$$S' = -\frac{a}{l} \sin\left(\frac{z}{l}\right) + \frac{b}{l} \cos\left(\frac{z}{l}\right) \quad \therefore$$

$$\frac{1}{q} = \frac{S'}{S} \Rightarrow q = \frac{S}{S'} = \frac{a \cdot \cos(z/l) + b \sin(z/l)}{-\frac{a}{l} \sin(z/l) + \frac{b}{l} \cos(z/l)}$$

Se $q(z=0) = q_0 \quad \therefore \quad \frac{a}{b/l} = q_0 \quad \therefore \quad \text{chamando} \quad \begin{matrix} b=l \\ a=q_0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow q(z) = \frac{q_0 \cdot \cos(z/l) + l \sin(z/l)}{-\frac{q_0}{l} \sin(z/l) + \frac{1}{l} \cos(z/l)}$$

$\therefore$ Note que $q(z) = \frac{A q_0 + B}{C q_0 + D}$

onde ABCD é a matriz para um meio "lens like"!