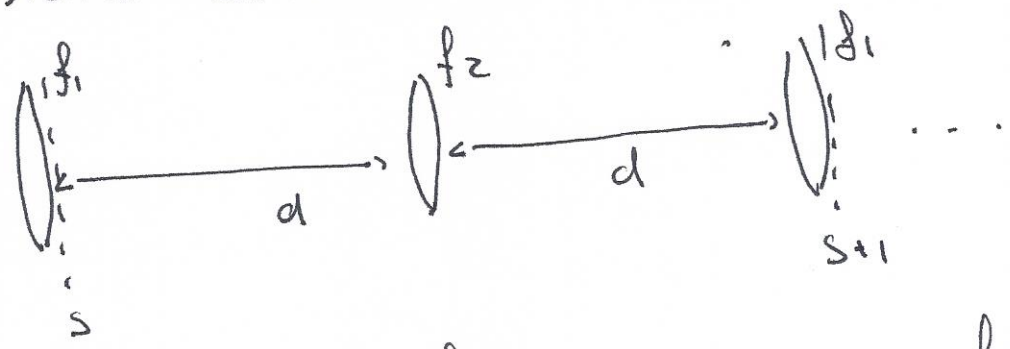


Por fim, como traçamos um feixe gaussiano em um guia de onda equivalente-lente?

Se conhecemos o feixe no plano  $s=1$  queremos saber como ele se comporta no plano  $s+1$ , após percorrer  $s$  células unitárias.

Vamos considerar novamente um equivalente lente



A matriz que transforma o feixe em  $s+1$  no feixe em  $s$  é

$$T = \begin{pmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\text{célula unitária}} = T_{\text{unitária}}^s$$

Agora, sabemos que, seja  $M$  uma matriz diagonal,

$$T_{\text{uni}} = F \cdot M \cdot F^{-1} \quad \text{onde } F \xrightarrow{\det F = 1} \text{ é a matriz diagonalizante}$$

$$\therefore T_{\text{uni}}^s = \underbrace{(F \cdot M \cdot F^{-1})}_{\text{I}} \cdot (F \cdot M \cdot F^{-1}) \cdot \dots \cdot (F \cdot M \cdot F^{-1})$$

$$= F \cdot M^s \cdot F^{-1}, \quad \text{agora, sendo } M \text{ uma}$$

matriz diagonal:  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \therefore M^s = \begin{pmatrix} a^s & 0 \\ 0 & b^s \end{pmatrix}$

Assim, ~~seja~~ diagonalizando  $T$  temos

(76)

$$\det \begin{pmatrix} A-d & B \\ C & D-d \end{pmatrix} = \underbrace{AD - BC}_1 - (A+D)d + d^2 = 0$$

$$\therefore d = e^{\pm i\theta} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$$\text{Assim, } T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{array}{l|l} ab \cdot (-2i \sin \theta) = B & ade^{i\theta} - bce^{-i\theta} = A \\ cd \cdot (2i \sin \theta) = C & ade^{-i\theta} - bce^{i\theta} = D \end{array}$$

$$\therefore T^S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} B_T = ab(-2i \sin \theta) & A_T = ade^{i\theta} - bce^{-i\theta} \\ C_T = cd(2i \sin \theta) & D_T = ade^{-i\theta} - bce^{i\theta} \end{array}$$

$$\therefore B_T = \frac{\sin(s\theta)}{\sin \theta} \cdot B \quad C_T = \frac{\sin(s\theta)}{\sin \theta} \cdot C$$

$$A_T = \frac{A \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]}{\sin \theta} \quad D_T = \frac{D \sin(s\theta) - \sin[(s-1)\theta]}{\sin \theta}$$

Com isso, ~~os~~ ~~posterior~~ APÓS PASSAR POR "S"  
células unitárias, temos

$$q_{s+1} = \frac{[A \{ \text{sen } s\theta - \text{sen}[(s-1)\theta] \} q_1 + B \text{sen } s\theta}{C \cdot \text{sen}(s\theta) q_1 + [D \cdot \text{sen } s\theta - \text{sen}[(s-1)\theta]]}$$

e a condição p/ que o feixe GAUSSIANO fique confinado  
é a mesma que p/ o traçado de raios:

$$-1 \leq \frac{1}{2}(A+D) \leq 1$$

Assim,  $|\text{sen}(s\theta)| \leq 1$  p/ qualquer  $s$ !

---

## Feixes GAUSSIANOS em Cavidades Ópticas

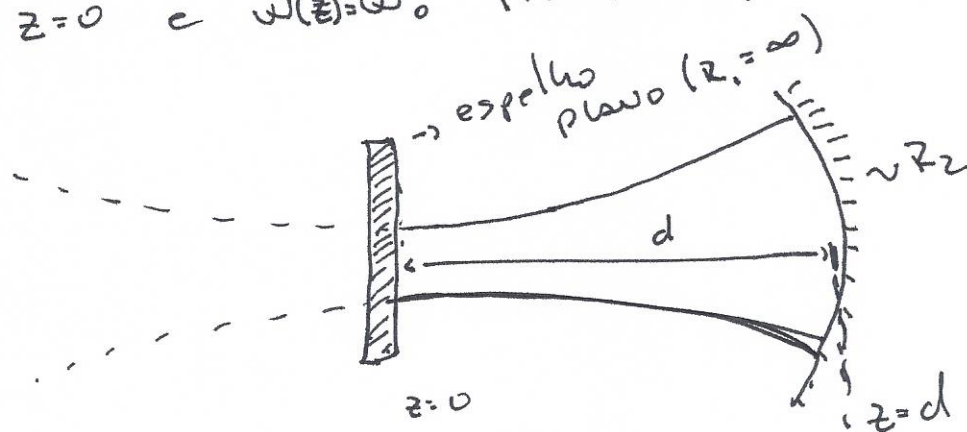
Ade o momento apresentamos como descrevem  
um feixe GAUSSIANO, e também os feixes Hermite-  
GAUSSIANO.

Vimos também como descrever sua propagação  
em um meio dado pela matriz ABCD e terminamos  
a propagar este feixe GAUSSIANO por um equivalente-  
lente.

Vamos agora "montar" uma cavidade óptica estável para este feixe Gaussiano!

Vamos pensar no caso mais simples de um ressonador estável, no qual após uma volta na cavidade o feixe é idêntico, ou seja  $q_s = q_{s+1}$

O caso mais simples é quando conhecemos o ponto onde  $z=0$  e  $w(z)=w_0$  ( $\therefore R=\infty$ )



Se colocamos um espelho plano em  $z=0$ , a fase de onda "posição" do feixe Gaussiano será a mesma no espelho

Agora, a uma distância  $d$  do espelho plano colocamos um espelho esférico de raio  $R_2$

Lembrando que, para o feixe Gaussiano, a frente de onda equifase é dada por uma frente esférica

com raio :

$$R(z) = z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$



Escolhendo  $R_2$  e  $d$  de modo que

(79)

$$R_2 = R(d) = d \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{d} \right)^2 \right]$$

talvez que o espelho esférico também "casa" o feixe do  
feixe nesse ponto!

Com isso, para uma dada cavidade com  $R_2$  e  $d$ ,  
o feixe gaussiano que vai encontrar um ressonador estável  
é aquele cujo  $w_0$  e  $z_0$  obedecem:

$$z_0^2 = R_2 d - d^2 = R_2 d \cdot \left( 1 - \frac{d}{R_2} \right)$$

$$\therefore z_0 = \sqrt{R_2 d} \cdot \left( 1 - \frac{d}{R_2} \right)^{1/2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Note que só há solução real se  $d \leq R_2$ , caso  
contrário não temos o ressonador estável!

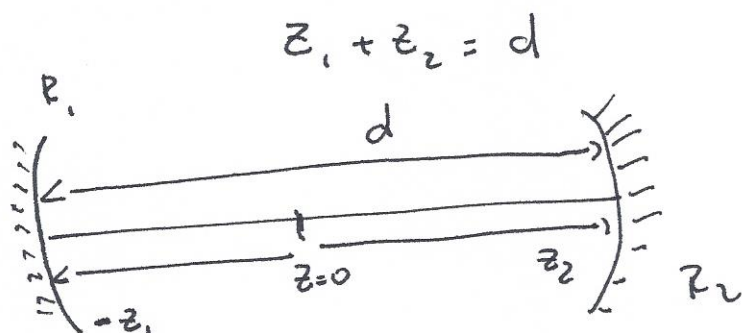
Uma vez conhecido  $z_0$  e  $w_0$ , podemos descrever o  
feixe em qual quer lugar da cavidade ~~em~~ a partir de

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

PARA o caso de cavidade formada por dois espelhos esféricos  $R_1$  e  $R_2$ , NÃO sabemos, em princípio, estabelecer onde é  $z=0$ , mas sabemos que, a posição  $z_1$  de  $R_1$  e  $z_2$  de  $R_2$  são tais que:



e para casar a frente de onda com a curvatura dos espelhos temos

$$R(z_2) = R_2 = z_2 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z_2} \right)^2 \right]$$

$$R(z_1) = -R_1 = -z_1 \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{-z_1} \right)^2 \right]$$

$\therefore$  dados  $R_1$ ,  $R_2$  e  $d$ , podemos resolver o sistema de equações acima, e encontrar  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{d_0}$

Resolver o sistema acima é bem trabalhoso, mas sai o resultado analítico após alguns passos.

Já para um sistema cuja cavidade é mais complexa, casar a frente de onda nos espelhos funciona, mas é um método muito trabalhoso.

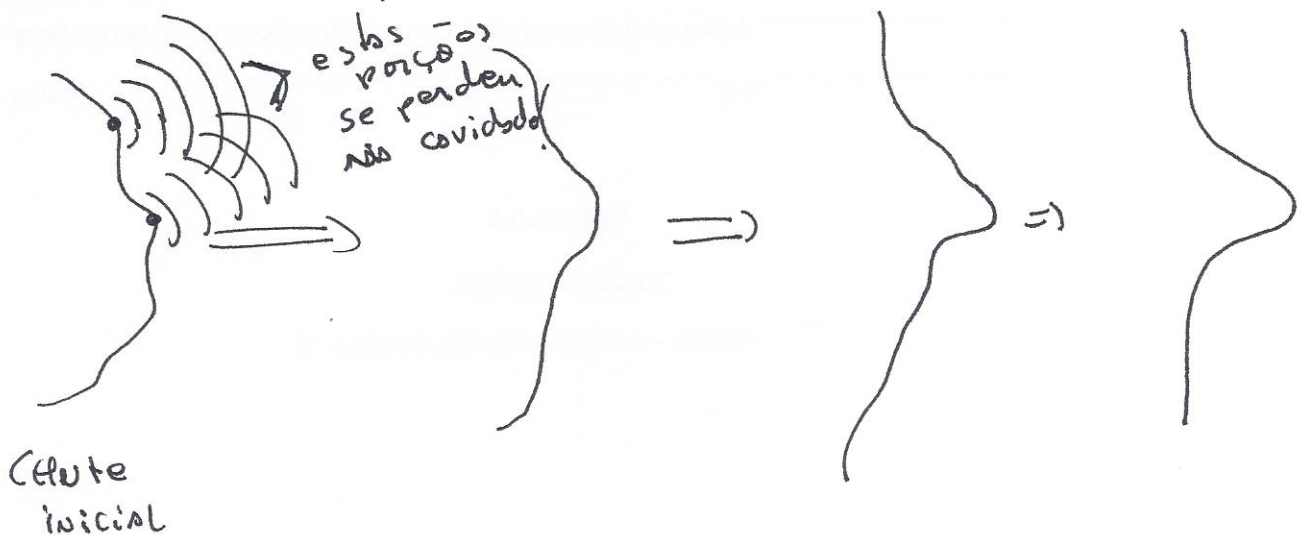
81  
E isso pode ser substituído pelo método das matrizes ABCD.

Em outras palavras, usamos a matriz ABCD para encontrar os modos característicos de uma cavidade!

¶ Aqui, definimos como modo de uma cavidade, a distribuição espacial do campo que se reproduz exatamente (mesmo que relativo) após uma volta na cavidade. ¶

O trabalho para achar os modos de uma cavidade pode ser árduo se o "chute" inicial p/ a frente de onda. Num ponto, digamos o primeiro espelho (M1), e fecho de forma arbitrária.

Usando o princípio de Huygens, que diz que cada ponto numa frente de onda pode ser tratado como uma fonte pontual, o modo da cavidade pode ser encontrado após inúmeras iterações:





Aqui vamos partir do que já conhecemos das equações de onda e assumir que o modo característico da cavidade é um feixe de Hermite-Gaussiano

Após isso, como é um modo, o feixe tem que ser o mesmo (no menos relativamente) em cada volta, portanto,

$$q(z_1 + 1 \text{ volta}) = q(z_1)$$

Assim, se já escrevemos a matriz ABCD para a célula unitária, temos que a solução é

$$q(z_1 + 1 \text{ volta}) = \frac{A q(z_1) + B}{C q(z_1) + D} = q(z_1)$$

ou seja, se  $q$  é solução p/ uma dada cavidade, então,  $q$  deve satisfazer:

$$C q(z_1)^2 + (D - A) q(z_1) - B = 0$$

ou, em termos de  $1/q$  temos:

$$\frac{1}{q(z_1)} = \frac{C + D/q(z_1)}{A + B/q(z_1)} \therefore B \left( \frac{1}{q} \right)^2 + \left( \frac{A-D}{2} \right) \cdot \frac{1}{q} - C = 0$$

cujas solução é:

$$\frac{1}{q} = -\frac{A-D}{2B} \pm \sqrt{\left( \frac{A-D}{2B} \right)^2 + C}$$



$$\frac{1}{q} = -\frac{A-D}{2B} \pm \frac{1}{B} \cdot \left( \frac{A^2}{4} - \underbrace{\frac{AD}{2}}_{+AD-BC=1} + \frac{D^2}{4} + \underbrace{BC}_{\textcircled{83}} \right)^{1/2}$$

$+AD-BC=1 \therefore$

$$\therefore \frac{1}{q} = -\frac{A-D}{2B} \pm \frac{1}{B} \cdot \left( \frac{A^2}{4} + \frac{AD}{2} + \frac{D^2}{4} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{q} = -\frac{A-D}{2B} \pm \frac{1}{B} \cdot \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{1}{q} = -\frac{A-D}{2B} - i \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right)^{1/2}}{B}$$

$$\frac{1}{q(z_1)} = \frac{1}{R(z_1)} - i \left( \frac{\pi m \omega^2(z_1)}{20} \right)^{-1}$$

Sempre positivo  $\therefore$  só a solução  $\ominus$  faz sentido físico.

com isso, os modos da cavidade são definidos por:

$$R(z_1) = -\frac{2B}{A-D}$$

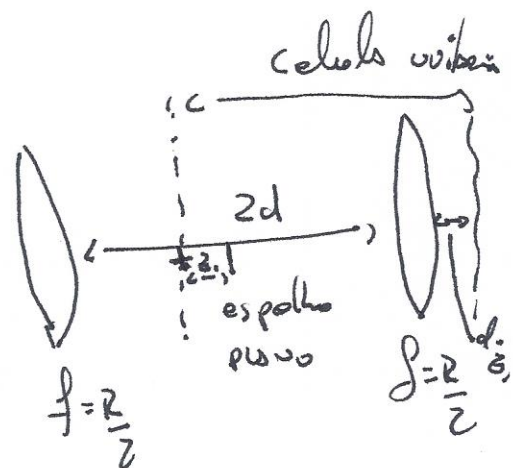
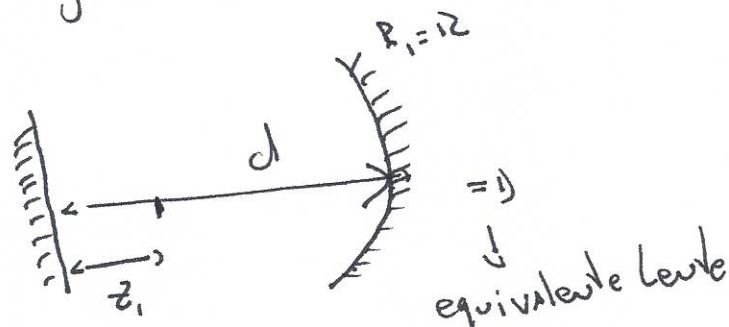
$$e \quad \frac{\pi m \omega^2(z_1)}{20} = \frac{B}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}$$

Note que isso só faz sentido se a cavidade e-estável, ou seja  $\left|\frac{A+D}{2}\right| \leq 1$ , caso contrário, q seria um n.º Real e isso seria equivalente a  $\omega \rightarrow \infty$  o que não faz sentido físico!!

Vamos fazer exemplos para entender melhor!

84

O caso que já trabalhamos:



$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d+z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{deslocamento de } d+z_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{lente}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & d-z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{deslocamento de } d-z_1}$$

$$\therefore T = \begin{pmatrix} 1 & d+z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d-z_1 \\ -\frac{2}{R} & 1 - \frac{2(d-z_1)}{R} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{1 - \frac{2}{R}(d+z_1)}^A & \overbrace{2d - \frac{2(d^2-z_1^2)}{R}}^B \\ \underbrace{-\frac{2}{R}}_C & \underbrace{1 - \frac{2(d-z_1)}{R}}_D \end{pmatrix}$$

$$\frac{A+1}{2} = \frac{2}{2} - 2 \cdot \frac{2d}{2} = 1 - \frac{2d}{R} \quad \therefore$$

$$1 - \left(\frac{A+1}{2}\right)^2 = 1 - 1 + 4\frac{d}{R} - \frac{4d^2}{R^2} = \frac{4d}{R} \cdot \left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

$$\therefore \frac{B}{\left[1 - \left(\frac{A+1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2d - \frac{2}{R}(d^2 - z_1^2)}{2\sqrt{\frac{d}{R}\left(1 - \frac{d}{R}\right)}} = \frac{\pi \omega_0^2(z_1)}{20}$$

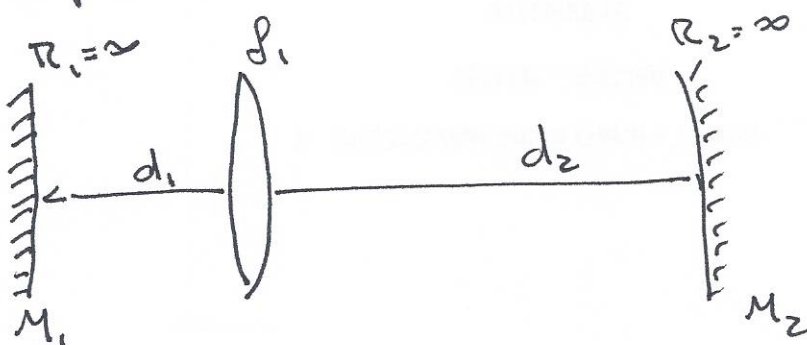
P/  $\omega_0 = \omega(z=0)$  temos.

$$\frac{\pi \omega_0^2}{20} = \frac{\frac{dR - d^2}{R}}{\sqrt{\frac{d}{R}\left(1 - \frac{d}{R}\right)}} = \frac{d \cdot R \cdot \left(1 - \frac{d}{R}\right) \cdot \sqrt{\frac{R}{d}}}{\sqrt{1 - \frac{d}{R}}}$$

$$\therefore \frac{\pi \omega_0^2}{20} = \sqrt{dR} \cdot \sqrt{1 - \frac{d}{R}}$$

que é o mesmo resultado que tínhamos!

Exemplo 2: Vamos ver um cavidade um pouco mais complexa:

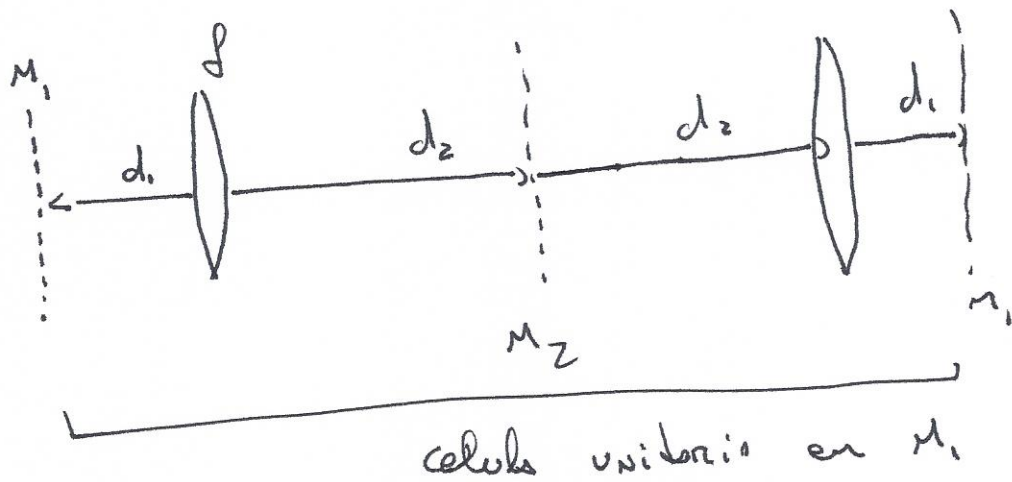


Achar o spot size em  $M_1$  e  $M_2$

Vamos achar o equivalente-lente e a matriz

(86)

ABCD:



$$\therefore T = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_1}{f} & d_1 \\ -\frac{1}{f} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d_1}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[1 - \frac{d_1}{f}\right] \left[2d_2 - \frac{2d_1 d_2}{f} + d_1\right] & d_1 \\ \left[-\frac{1}{f}\right] \left[1 - \frac{2d_2}{f}\right] & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix}$$

$$\therefore T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2d_1}{f} - \frac{2d_2}{f} + \frac{2d_1 d_2}{f^2} & \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \left(2d_2 + 2d_1 - \frac{2d_1 d_2}{f}\right) \\ -\frac{1}{f} \left(2 - \frac{2d_2}{f}\right) & -\frac{d_1}{f} + \left(1 - \frac{2d_2}{f}\right) \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \end{pmatrix}$$



Note que começamos com a célula em  $M_1$ , portanto, (87)

$$\frac{\pi \omega_{01}^2}{2} = \frac{B}{\sqrt{1 - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}$$

$$A+D = 1 - \frac{2d_1}{f} - \frac{2d_2}{f} + \frac{2d_1d_2}{f^2} - \frac{2d_1}{f} + 1 - \frac{2d_2}{f} + \frac{2d_1d_2}{f^2} = 2A$$

$$\therefore \frac{\pi \omega_{01}^2}{2} = \frac{B}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{B}{\sqrt{(1-A)(1+A)}} = \frac{\left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \sqrt{(1-A)}}{\sqrt{(1-A)(1+A)}} =$$

$$= \left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \cdot \sqrt{\frac{1-A}{1+A}} = 1 - \frac{d_1}{f} \left[ \frac{\sqrt{\frac{2d_1}{f} + \frac{2d_2}{f} - \frac{2d_1d_2}{f^2}}}{\sqrt{2 - \frac{2d_1}{f} - \frac{2d_2}{f} + \frac{2d_1d_2}{f^2}}} \right] \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{d_1}{f}\right) \cdot \left(1 - \frac{d_2}{f}\right)}$$

$$\frac{\pi \omega_{01}^2}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{d_1}{f}}{1 - \frac{d_2}{f}}} \cdot \sqrt{\frac{d_1}{f} + \frac{d_2}{f} - \frac{d_1d_2}{f^2}}$$

Agora, p/  $\omega_{02}$  basta trocar  $d_1 \rightarrow d_2$   
 $d_2 \rightarrow d_1$

Por fim, achar os modos em uma cavidade usando  $\textcircled{88}$   
matriz ABCD é simples se seguirmos os seguintes passos

1) assumir que o modo é Hermite-Gaussiano

2) Determinar o equivalente lente que induz uma volta completa (ao novo)

3) identificando a célula unitária, veja se  $\left| \frac{A+D}{2} \right| \leq 1$ , ou seja, se a cavidade é estável

4) note que podemos começar a célula unitária em qualquer ponto,  $z$ , mas acharemos o  $q(z)$

5) fazendo  $q(z, \pm 1 \text{ volta}) = q(z, 1)$  chegamos à solução!

6) se quisermos achar  $q(z)$  temos que fazer  $z$  arbitrário como no primeiro exemplo!