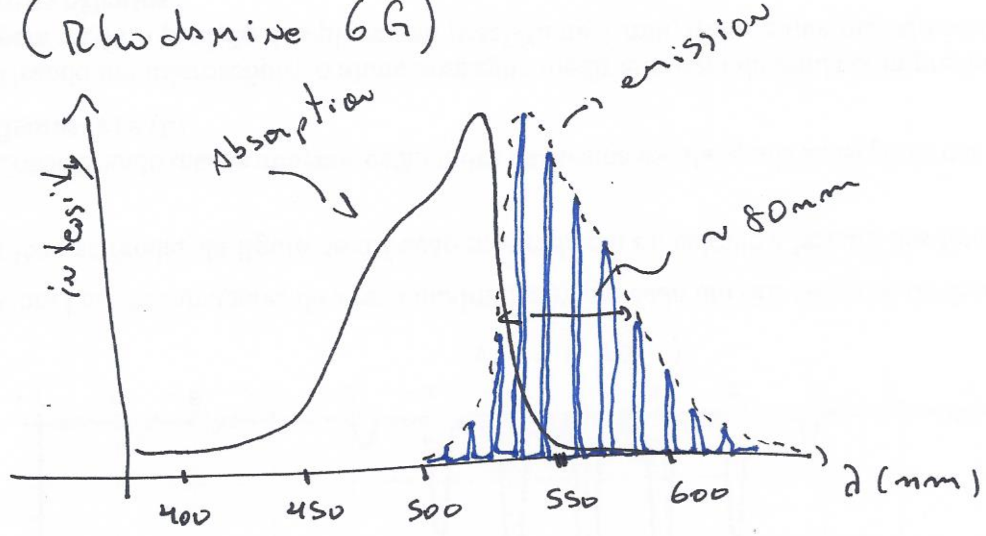
Cavidades Ópticas Ressonantes

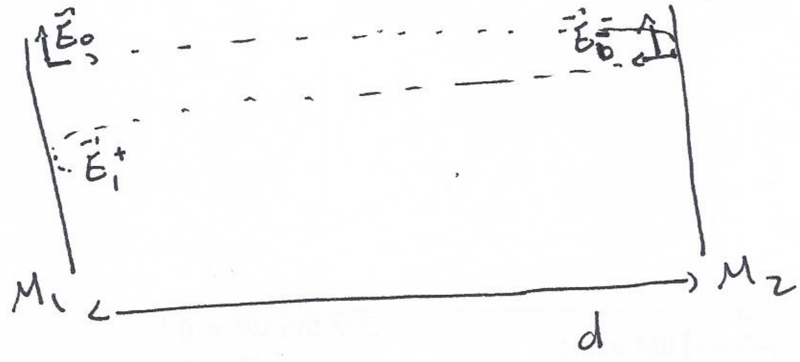
Mais do que fazer o campo eletromagnético seguir para frente e para trás amplificando o laser no seu meio de ganho, a cavidade óptica define também outros parâmetros muito importantes do laser, principalmente sua frequência (ou comprimento de onda)

Por exemplo, vamos olhar o caso de um laser de corante (Rhodamine 6G)



Note que a banda é de ≈ 80nm, mas nem toda essa banda pode oscilar na cavidade, mas apenas λ's (ou frequências) bem específicos definidos pela própria cavidade! Essas são ilustradas (de forma grosseira) na figura acima com os picos em azul.

Vamos ver agora como a cavidade decide qual λ irá oscilar dentro dela!



Vou chamar de Γ_1 a mudança na amplitude do campo na ida e Γ_2 na volta

$$\therefore \vec{E}_0^- = \Gamma_1 . \vec{E}_0 e^{-ik.d} \quad \therefore \vec{E}_1^+ = \Gamma_1 . \Gamma_2 . e^{-2ikd}$$

e assim por diante! Se $2k.d$ for um número qualquer, em M_1 o campo resultante iria passar por interferências construtivas e destrutivas ~~e seu campo~~ diminuindo sua intensidade!

Agora, se depois de cada volta completa o atraso de fase da volta (RTPS - round trip phase shift) for um inteiro de 2π, após cada volta completa o ~~feixe~~ campo retorna a sua fase inicial e apenas interferências construtivas estarão presentes, tornando o E resultante o maior possível!

Com isso, o $RTPS = 2kd = l.2\pi$ → nº inteiro!

e $2.\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}.d = l.\cancel{2\pi} \therefore \boxed{d = l.\frac{\lambda}{2}}$ → comprimento de onda na cavidade!

Vamos agora ter uma ideia da ordem de grandeza de "ℓ" para cavidades ópticas.

Laser chip de semicondutor (GaAs)

$\lambda_0 = 800nm$, $d \simeq 100\mu m$ $n = 3.6$ ∴

$$100 \times 10^{-6} = \ell . \frac{800 \times 10^{-9}}{2 . 3.6} \quad \therefore \quad \boxed{\ell \simeq 900}$$

Note que se o meio emissor tem uma banda que ~~comp~~ contem outros λ's, então $\ell = 899 \Rightarrow \lambda_0 = 800,89\ nm$

$\ell = 901 \Rightarrow \lambda_0 = 799,12\ nm$

também ~~são~~ podem ser amplificados na cavidade!

Por outro lado, em um laser de ~~A~~ íon de Argônio operando em 514.5 nm teria: $d \simeq 25cm$

$n \simeq 1.0$ (praticamente do ar!)

$$\therefore \quad \ell = \frac{d . 2 . n}{\lambda} = \frac{25 . 2 . 1 \times 10^{-2}}{514.5 \times 10^{-9}} \simeq 971.817.$$

de fato, se calcularmos os ~~...~~ comprimentos de onda que podem ser amplificados nessa cavidade, temos:

$\ell = 971.817 \Rightarrow \lambda = 514,500158\ nm$

$\ell = 971.818 \Rightarrow \lambda = 514,499629\ nm$

$\ell = 971.816 \Rightarrow \lambda = 514,500687\ nm$

Note que $\Delta\lambda \ll \lambda$ e isso é melhor expresso em termos da frequência ν, tal que $\lambda . \nu = \frac{c}{n} \Rightarrow$

$$\nu = l . \frac{c}{2n.d}, \text{ com isso,}$$

a separação entre duas frequências da cavidade é

$$\nu_{l+1} - \nu_l = (l+1) \frac{c}{2nd} - l \frac{c}{2nd}$$

$$\left[\nu_{l+1} - \nu_l = \frac{c}{2nd} \right] \text{ Free Spectral Range}$$

~~Vamos voltar ao exemplo~~ Note que o FSR não depende do comprimento de onda (ok, depende um pouco por que o índice de refração tem dispersão!), mas sim do tamanho da cavidade!

Para o exemplo do laser de Argônio: $FSR = 6 \times 10^8$ Hz ou

$$FSR = 600 \text{ MHz}$$

enquanto que $\nu = \frac{c}{\lambda} = l . \frac{c}{2d} = 5{,}8309 \times 10^{14}$ Hz $= 583$ THz

Mesmo para lasers em cavidades pequenas como o semicondutor chip, temos $FSR = \frac{c}{2nd} = \frac{3 \times 10^8}{2.3.6 \times 100 \times 10^{-6}} =$

$$FSR = 417 \text{ GHz}$$

Enquanto $\nu = 375$ THz.

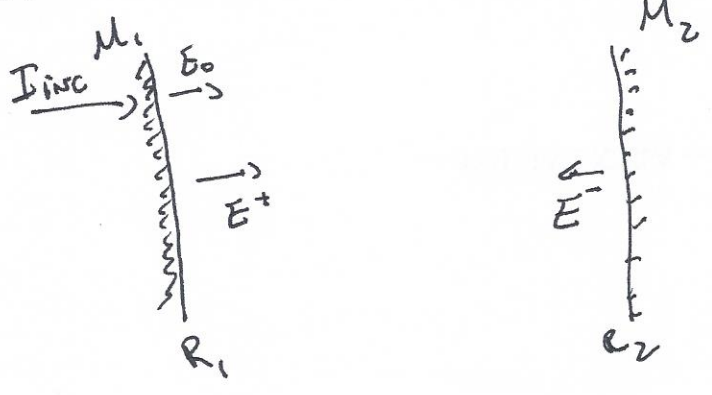
Vamos continuar a analisar nosso sistema de dois espelhos planos separados por uma distância "d". Este sistema, chamado ETALON é usado em cavidades ópticas e em espectrômetros (cavidade de Fabry-Pérot ou espectrômetro de Fabry-Pérot) devido à sua alta seletividade das frequências.

Para entender, vamos estudar esse sistema de dois espelhos, considerando a onda transmitida por ele.

Como vimos, o campo elétrico interno do sistema é máximo quando $RTPS = l.2\pi$, mas, mesmo quando há um pequeno desvio da condição de ressonância, podemos ter campos intensos dentro da cavidade!

As perguntas que queremos responder agora são: quão pequeno tem que ser o desvio?; qual a razão entre o campo em ressonância e em "anti-ressonância" (ou seja, se $RTPS = (l+\frac{1}{2})\pi$; e quão seletivo é esse sistema?

Vamos chamar de "E^+" o campo propagando para a direita do leitor!



da mesma forma E^- é o campo viajando p/ a esquerda!

Sendo assim, no espelho M_1, o campo total viajando p/ a direita é

$$E^+_{total} = \sum_{N=0}^{\infty} E_N^+ = \vec{E}_0 \cdot \left(1 + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta} + (\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta})^2 + \dots + (\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta})^N + \dots \right) \qquad kd \equiv \theta$$

o superscrito indica o número de voltas completas.

Chamando $\Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta} = u$ temos

$$(1 + u + u^2 + u^3 \dots) = \frac{1}{1-u}$$

portanto:

$$\boxed{E^+_{total} = \vec{E}_0 \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta}}}$$

Agora, o campo voltando de M_2 (e em M_1) é E^-_{total} e é nada mais que $E^-_{total} = E^+_{total} \cdot e^{-i2\theta} \cdot \Gamma_2 \rightarrow$ perda no M_2

$\downarrow$ fase de uma volta

Note que aqui estamos supondo que as perdas $\Gamma_1 \Gamma_2$ se dão apenas nos espelhos (vácuo entre eles!). Neste caso:

$$E^-_{total} = \vec{E}_0 \cdot \frac{\Gamma_2 \cdot e^{-i2\theta}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-i2\theta}}$$

Veja que se $2\theta = 2\pi . l$ tanto E^{+}_{total} quanto E^{-}_{total} são máximos

Olhando agora a intensidade de cada onda, temos que

$$I^{\pm}(z=0^{+}) = \frac{E^{*\pm}_{total} \cdot E^{\pm}_{total}}{2\eta} \qquad \underbrace{\eta = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 . n}\right)^{1/2}}_{\text{impedância da onda!}}$$

$\downarrow$ significa que é em frente ao M_1, ou seja aproximando da $z=0$ pelo lado positivo!

Assim,

$$I^{+}(z=0^{+}) = \underbrace{\frac{|E_0|^2}{2\eta}}_{I_0} \cdot \left[\frac{1}{1 - \Gamma_1\Gamma_2 e^{-i2\theta} - (\Gamma_1\Gamma_2 e^{-i2\theta})^{*} + |\Gamma_1\Gamma_2|^2}\right]$$

$$= I_0 \cdot \frac{1}{1 - 2|\Gamma_1\Gamma_2|\cos 2\theta + |\Gamma_1\Gamma_2|^2}$$

ou ainda:

$$I^{+}(z=0^{+}) = I_0 \cdot \frac{1}{1 - 2|\Gamma_1\Gamma_2|(1-2\,\mathrm{sen}^2\theta) + |\Gamma_1\Gamma_2|^2}$$

Como estamos considerando que as mudanças na intensidade do campo só se dá por reflexões nos espelhos podemos definir $R_{1,2}$ como

$$I_{ref} = R_{1,2} \cdot I_{incidente} \therefore |E_{ref}|^2 = |\Gamma_{1,2}|^2 |E_{inc}|^2$$

$$\therefore R_{1,2} = |\Gamma_{1,2}|^2$$

e $I^+(z=0^+) = \frac{|\bar{E}_0|^2}{2\eta} \cdot \frac{1}{\left[\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1R_2}\,\text{sen}^2\theta\right]}$

Agora, vamos considerar que uma onda incidente com intensidade I_{inc} chega em M_1 pela sua esquerda, $I_{inc} = \frac{|E_{inc}|^2}{2\eta}$. Sendo R_1 o coeficiente de reflexão no espelho M_1, a transmissão por este espelho é

$$T_1 = 1 - R_1$$ (perdas por absorção, espalhamento são desprezadas)

com isso, o campo que entra na cavidade é tal que

$$I_0 = \frac{|E_0|^2}{2\eta} = T_1 \cdot I_{inc} = (1-R_1) \cdot I_{inc}$$

Agora, é interessante entender qual a intensidade do campo que sai desta cavidade! ~~Este~~ O campo que bate no espelho M_2 é

$$E^+_{total}(z=d^-) = \bar{E}_0 \cdot \frac{e^{i\theta}}{1-\Gamma_1\Gamma_2 e^{-i2\theta}}$$

e a intensidade é

pois não temos outras perdas na cavidade

$$I^+(z=d^-) = \frac{E_0^2}{2\eta} \cdot \frac{1}{\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1R_2}\,\text{sen}^2\theta} = I^+(z=0^+)$$

A intensidade que sai por M_2 é

$$I_{out} = I^{+}(z=d^-) \cdot T_2 = \frac{(1-R_1)\cdot(1-R_2)}{\left[\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1R_2}\,\text{sen}^2\theta\right]} \cdot I_{inc}.$$

Vamos definir então a transmissão do Etalon como:

$$T(\theta) = \frac{I_{out}}{I_{inc}} = \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)^2 + 4\sqrt{R_1R_2}\,\text{sen}^2\theta}$$

Exemplo: Considere uma cavidade de Fabry-Perot com $R_1 = R_2 = 0.99$, calcule T na ressonância e na "anti-ressonância"! Qual a intensidade do campo dentro da cavidade?

1) se $\theta = \pi . l \therefore \text{sen}\theta = 0 \Rightarrow$

$$T(0) = \frac{10^{-2} \cdot 10^{-2}}{(1-0.99)^2} = 1$$

de fato, note que, para qualquer R_1, R_2:

$$T(0) = \frac{(1-R_1)\cdot(1-R_2)}{\left(1-\sqrt{R_1R_2}\right)^2 + 0} = \frac{1 - R_1 - R_2 + R_1R_2}{1 - 2\sqrt{R_1R_2} + R_1R_2} \Rightarrow$$

Se $R_1 = R_2 = R$ temos: $T(0) = \dfrac{1 - 2R + R^2}{1 - 2R + R^2} = 1$

ou seja, em ressonância, $T = 1$ p/ qualquer R! Muito contraintuitivo pois $R = 0.99$ nos dois espelhos!

Além disso, a onda que viaja na cavidade tem

$$I^{+}_{total}(z) = \frac{I_{out}}{1 - R_2} = 100 \times I_{inc}$$

Como pode a onda interna ser 100 vezes mais intensa que a incidente?

A cavidade funciona como um "reservatório" da onda e dentro dela pode oscilar uma grande intensidade! Obviamente, não viola a conservação de energia!

Vamos ver agora na condição de anti-ressonância

$$T\left(\theta = \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} = \frac{10^{-4}}{1.99^2} = 2.53 \times 10^{-5}$$

Agora, note que se $R = 0.8$ a cavidade "recusa" menos as frequências fora de ressonância com ~~menos~~

$$T\left(\theta = \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{0.2^2}{1.8^2} = 1,23 \times 10^{-2}$$

Podemos então qualificar quão boa é a cavidade por sua capacidade de ~~~~ recusar as frequências fora de ressonância e por quão "fino" é o pico de frequência permitido.

Definimos, então, o fator de Qualidade de uma cavidade como:

$$Q = \frac{\nu_0}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{1/2}}$$

onde $\Delta\nu_{\frac{1}{2}}$ é a largura a meia altura do pico, ou largura FWHM (full width at half maximum)

Quanto melhor a cavidade, menor o $\Delta\nu_{\frac{1}{2}}$ e, definindo

$$\theta_{+,-} = \frac{\omega_{+,-}\, n d}{c} \quad \text{podemos ter que}$$

$$\Delta\nu_{\frac{1}{2}} = \nu_+ - \nu_- = \frac{1}{2\pi}\cdot \omega_+ - \omega_- = \frac{1}{2\pi}\frac{c}{nd}\cdot(\theta_+ - \theta_-)$$

Agora, assumindo que $\Delta\nu$ é pequeno, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}\theta_{+,-} = \operatorname{sen}(\underbrace{\theta}_{\text{ressonância}} \pm \overset{\ll 1}{\delta}) = \cancel{\operatorname{sen}\theta}^{\,\to 0}\cos\delta \pm \operatorname{sen}\delta\,\cancel{\cos\theta}^{\,\to 1}$$

$$= \operatorname{sen}\delta$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen}\theta_{+,-} \cong \operatorname{sen}\delta \cong \delta$$

da expressão de $T(\theta)$, temos que, para $T(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\operatorname{sen}\theta_{+,-} \cong \pm\frac{1}{2}\,\frac{1-(R_1R_2)^{2}}{(R_1R_2)^{1/4}} \quad \therefore$$

$$\Delta\nu_{\frac{1}{2}} = \frac{c}{2nd} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{1-(R_1R_2)^2}{2(R_1R_2)^{1/4}} + \frac{1-(R_1R_2)^2}{2(R_1R_2)^{1/4}} \right]$$

$$= \frac{c}{2nd} \cdot \left(\frac{1-(R_1R_2)^2}{\pi (R_1R_2)^{1/4}} \right)$$

Com isso, $Q = \frac{2\pi n d}{\lambda_0} \cdot \left[\frac{(R_1R_2)^{1/4}}{1-(R_1R_2)^{1/2}} \right]$

Note que, para frequências ópticas, $\nu \simeq 10^{14} - 10^{15}$ Hz

e $\Delta\nu \simeq 100-1000$ kHz $\therefore$ $Q \simeq 10^{8}$ $\Rightarrow$

No caso do óptico o fator de Qualidade Q é tipicamente muito grande, portanto, gostamos de definir um número um pouco mais palpável, e chamamos de Finesse

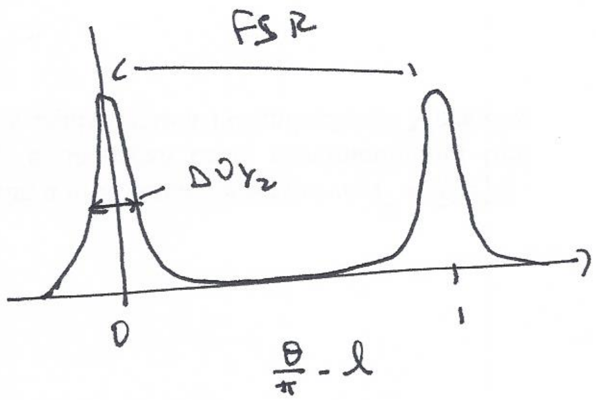
$$F = \frac{FSR}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{c/2nd}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{\pi (R_1R_2)^{1/4}}{1-(R_1R_2)^{1/2}}$$

Num caso onde $\lambda_0 = 800$ nm, $d = 1$ cm $R_1 = R_2 = 0.99$,

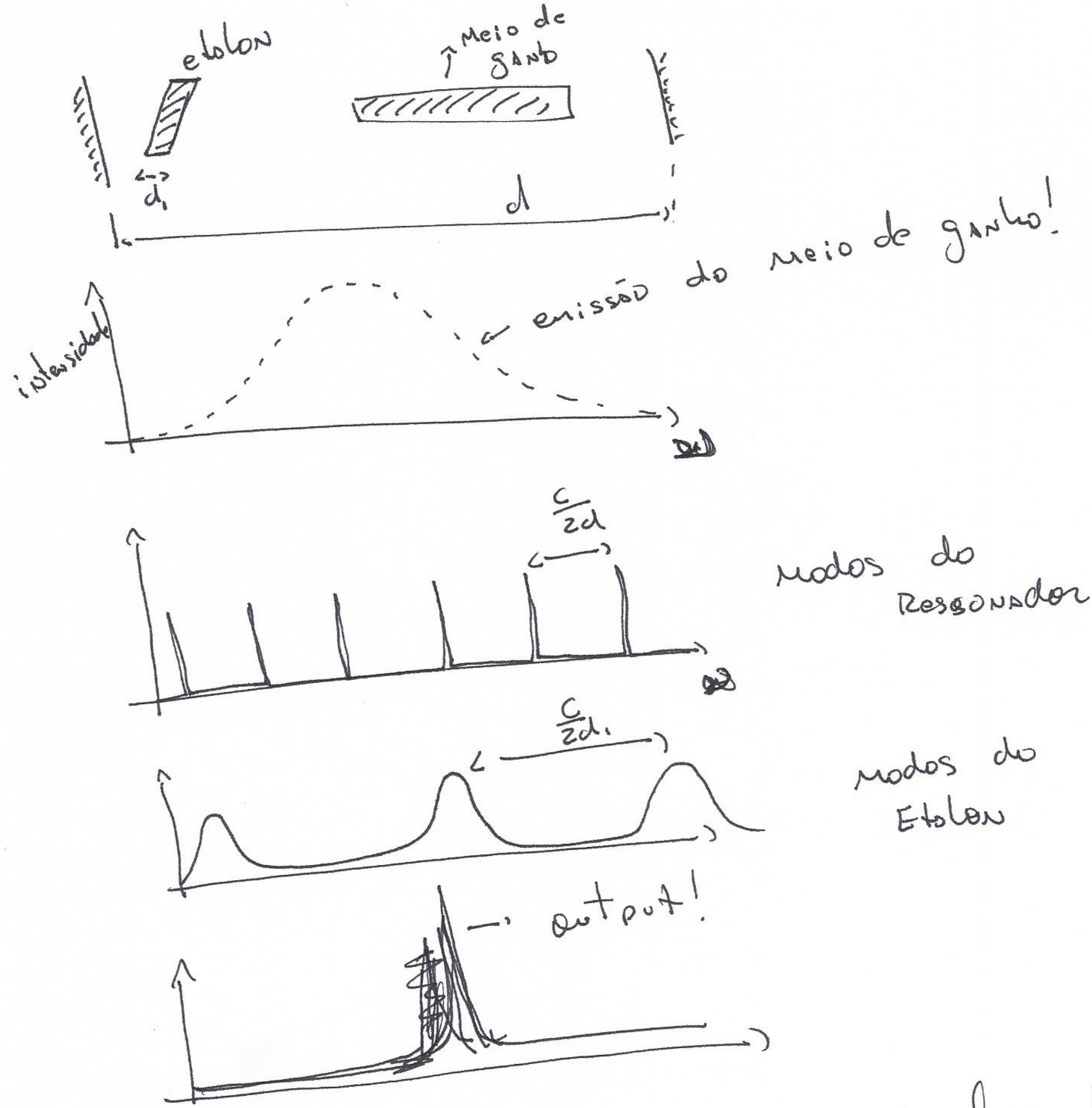
temos:

$Q = 7.85 \times 10^7$

$F = 313$



Exemplo de uso da cavidade de Fabry Perot



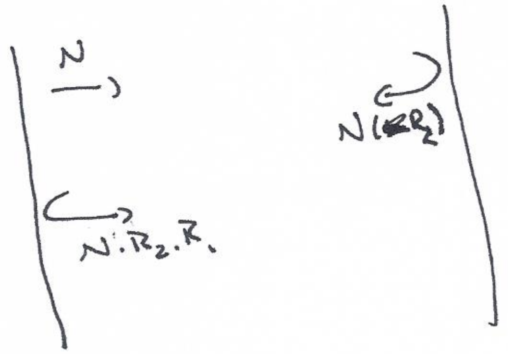
Ou seja, o etalon filtra a frequência do laser!

Se $\Delta\nu_{1/2}$ for muito pequeno, ele filtra só um modo do ressonador!

Outra grandeza relevante para cavidades é o chamado <u>tempo de vida do photon</u>.

Vamos supor que em $t=0$ temos N fótons na cavidade.

O número de fótons diminui após cada reflexão por $N \Rightarrow R.N$



Definindo $S = R_1 R_2$ como a fração de fótons que ficam na cavidade após uma volta, temos que a quantidade de fótons perdidos é

$$\Delta N = (1-S).N$$

Agora, a taxa com a qual isso ocorre é

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\tau_{RT}) - N(t)}{\tau_{RT}} = -\frac{(1-S).N}{\tau_{RT}} = \frac{dN}{dt}$$

↳ tempo de uma volta!

$$\therefore \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau_p} \quad \text{onde} \quad \tau_p^{-1} = \frac{(1-S)}{\tau_{RT}} \Rightarrow$$

$$\tau_p = \frac{\tau_{RT}}{1-S} \Rightarrow$$ tempo de vida do fóton!

Assim $N(t) = N_0 . e^{-t/\tau_p}$

Tomando que o fóton tem energia $h\nu$, a energia armazenada na cavidade é dada por $E = N.h\nu$ e esta decai da mesma forma que $N(t)$!

Num sistema simples de dois espelhos separados por "d",
$$\tau_{RT} = \frac{2.nd}{c} \quad e \quad S = R_1 R_2$$

Se existem outras perdas no sistema, de modo que, numa volta a perda é $e^{-2\alpha d}$ $\Rightarrow$ $S = e^{-2\alpha d} R_1 R_2$

e, quanto maior o termo de perda α, menor τ_p!

Olhando em termos da energia perdida no sistema, outra forma de calcular o fator de Qualidade leva em conta a energia armazenada na ressonância e a energia perdida em uma oscilação

$$Q = \frac{2\pi . E_{armazenada}}{\Delta E_{perdida\ em\ 1\ oscilação}}$$

$$\Delta E_{perdida} = -\frac{dE}{dt} . T$$
↳ período da oscilação

$$\therefore \quad Q = \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega_0} . \frac{E}{-\frac{dE}{dt}} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -E . \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow$$

$$E = h\nu . N \therefore -\frac{\omega_0}{Q} . h\nu . N = \frac{d}{dt}(h\nu N) = h\nu \frac{dN}{dt}$$

ou $$-\frac{\omega_0}{Q} . \cancel{h\nu} . \cancel{N} = -\cancel{h\nu} . \frac{\cancel{N}}{\tau_p} \therefore \boxed{\tau_p = \frac{Q}{\omega_0}}$$

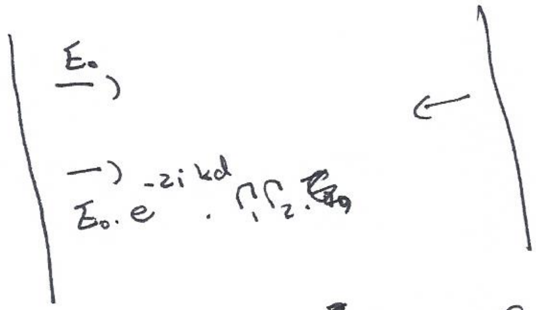
Note que $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2}} \therefore \tau_p = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega_{1/2} . \omega_0} \Rightarrow$

$$\boxed{\tau_p . \Delta\omega_{1/2} = 1} \Rightarrow$$

Até agora, colocamos a luz dentro da cavidade, mas em osciladores o que ocorre é que tudo começa do ruído, ou seja, o material de ganho emite luz (~~fotolumine~~ luminescência) e o modo vai acoplando até que o número de fótons na cavidade aumenta atingindo um estado estacionário, $\frac{dN}{dt} \to 0$! Portanto, inicialmente, $\tau_p < 0$ pois $N(t)$ aumenta com o tempo, nesse caso, o ganho da cavidade é > 1, quando o ganho e perda se equivalem $\Rightarrow$ ganho $= 1$ e $\frac{dN}{dt} \to 0$ de modo que $\tau_p \to \infty$!

Ganho G_0 no meio!

Vamos colocar um meio de ganho na nossa cavidade:



$$|\Gamma_1|^2 = R_1 \cdot G_0$$

$$|\Gamma_2|^2 = R_2 \cdot G_0$$

↳ ganho igual na ida e na volta!

Assim, $R_1 \cdot R_2 \Rightarrow G_0^2 \cdot R_1 R_2 \Rightarrow$

e a intensidade transmitida é:

$$I_{out} = \frac{(1 - R_1) \cdot I_{in} \cdot G_0 (1 - R_2)}{\left[\left(1 - G_0\sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4 G_0 \sqrt{R_1 R_2}\, \text{sen}^2\theta\right]} \quad \therefore$$

$$T(\theta) = \frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{G_0 (1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[\left(1 - G_0\sqrt{R_1 R_2}\right)^2 + 4 G_0 \sqrt{R_1 R_2}\, \text{sen}^2\theta\right]}$$

e a largura a meia altura também muda:

$$2 \cdot \Delta\theta_{1/2} = \frac{1 - G_0\sqrt{R_1 R_2}}{G_0^{1/2} \cdot (R_1 R_2)^{1/4}}$$