

Oscilação e Amplificação laser

Correções o wizo visto a propagação de ondas e passamos pelos condutores ópticos com feixes gaussianos (Hermite-Gauss). Na última parte vimos a radiação do meio de gás e chegamos no coeficiente de ganho deste meio:

$$\gamma(v) = \frac{I_{\text{vaz}} I_0}{h\nu} \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

O que pode também ser escrito como

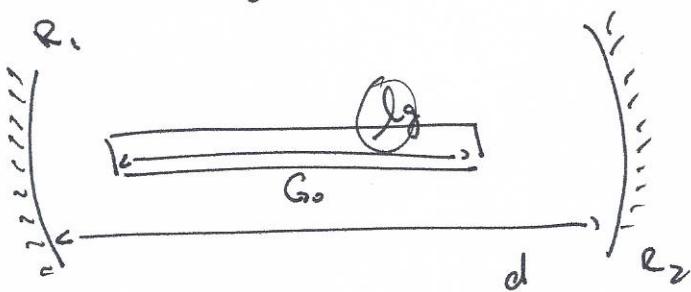
$$p_e(v) = A_{z_1} \frac{\pi^2}{8\pi m^2} \cdot g(v) \cdot \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

e dizemos que $\gamma(v) = p_e(v)$ quando estamos falando de sinalis pequenos ou seja, se I_0 não mudar $N_2 = N_1$ consideravelmente.

Definimos ganho como $G_o(v) = e^{p_e(v) \cdot l_g}$ e onde l_g = comprimento do meio de ganho

E com $G_o = G_o(\lambda)$ podemos ter um filtro que é seletivo & só um estreita faixa espectral.

Agora, para o oscilador, precisamos que após cada volta na cavidade a intensidade do feixe aumente um pouco, ou seja:



$$\begin{aligned} I_{S+1} &= I_S \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot G_0 \cdot R_1 \\ &= I_S \cdot G_0^2 \cdot R_2 \cdot R_1 \end{aligned}$$

ou seja, precisamos que $R_2 \cdot R_1 \cdot e^{2\eta_0(v) \cdot lg} \geq 1$

ou ainda, $e^{2\eta_0(v) \cdot lg} \geq \frac{1}{R_2 \cdot R_1} \quad \therefore 2\eta_0(v) \cdot lg \geq \ln\left(\frac{1}{R_2 \cdot R_1}\right)$

$$\therefore \eta_0(v) \geq \frac{\frac{1}{2lg} \cdot \ln\left(\frac{1}{R_1 \cdot R_2}\right)}{\alpha}$$

dizemos que $\eta_0(v) \geq \alpha$ onde α é o coeficiente de perdas na cavidade.

De forma geral $\alpha = \alpha(v)$ pois pode depender de absorção, espolhamento, etc. disso, R_1 e R_2 também dependem de v . Todavia, para um feixe estreito de v , R_1 e R_2 variam pouco e podem ser considerados constantes.

Vamos assumir o pressuposto de α , ou seja, vamos dizer que α é constante na faixa de $g(v)$.

Como $\rho_0(\nu)$ depende fundamentalmente de ν , a inequação $\rho_0(\nu) \geq d$ será verdade para um dado faixa espectral.

Tipicamente, $\rho_0(\nu) \geq d$ para uma banda de frequências maior que o FSR da cavidade, o que define a frequência de oscilação?

Mais que isso, se $G_0^2 R_1 R_2 \geq 1$, $I_s = (G_0^2 R_1 R_2)^s I_0$ o que tende a infinito. Portanto, obviamente, a equação acima não é verdade sempre, ocorrendo a saturação do gás.

Em um sistema com largamento homogêneo,

$$g_h(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi \left((\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 \right)}$$

sendo $\rho_0(\nu) = \frac{A_{21} \bar{d}^2}{8\pi n^2} \cdot g(\nu) \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$

Temos $\rho_0(\nu) = \underbrace{\frac{A_{21} \bar{d}^2}{8\pi n^2} \cdot \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)}_{\rho_0(\nu_0)} \cdot \frac{1}{2\pi \Delta\nu} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \right]$

∴ $\rho_0(\nu) = \rho_0(\nu_0) \cdot \frac{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}$

Se $\rho_0(\nu_0) = N \cdot \alpha$
 $\Rightarrow \alpha > 1$

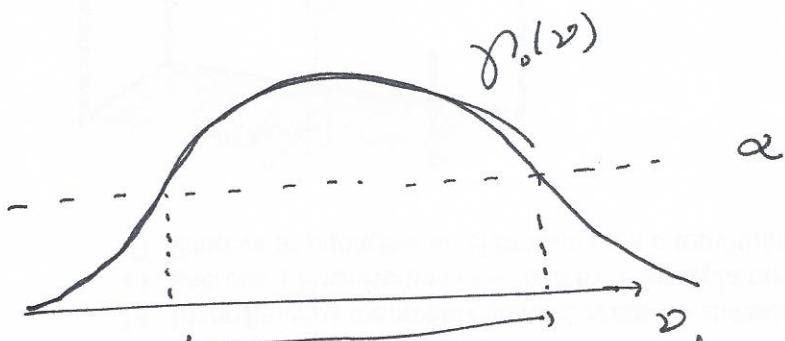
Temos que $\rho_0(\nu) \geq \alpha \quad \forall$

$$\frac{N \alpha \cdot \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \geq \alpha \quad \therefore$$

$$(N-1)\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 \geq (\nu_0 - \nu)^2 \quad \therefore \quad 2|\nu_0 - \nu| \leq (N-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta\nu$$

Esse é o banda de amplificação do sistema.

Agora, dentro dessa banda, pode existir um número grande de modos da cavidade. A questão é: qual modo vai oscilar preferencialmente?

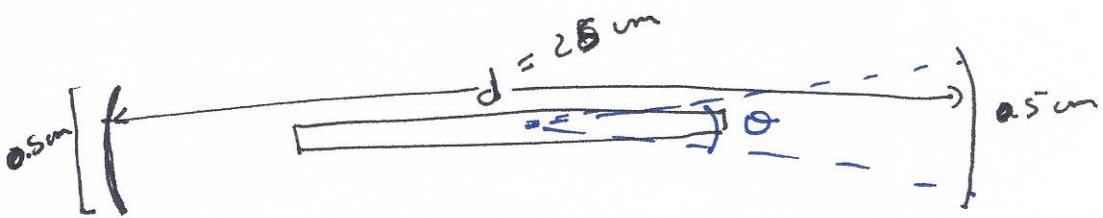


Região em que pode existir ganchos!

Seguindo os cálculos que fizemos para o número de modos em uma cavidade, temos que, para,

por exemplo, um laser de Argônio em 514nm e um tubo de 10cm^3 ? Se o gás é tal que $\rho_0(\nu) \approx 4.\alpha$ e $\Delta\nu = 1\text{GHz}$ \therefore uns bando de $\Delta\nu_{gás} \approx 1,7\text{GHz}$ pode ser simplificado.

e Nessa fixa, cerca de $\left(\frac{8\pi\cdot d^2\Delta\nu}{c^3}\right)\sqrt{\nu} \approx 3\cdot 10^{10}$ modos "cobri" Nessa covidade, dentro dessa fixa espectral!

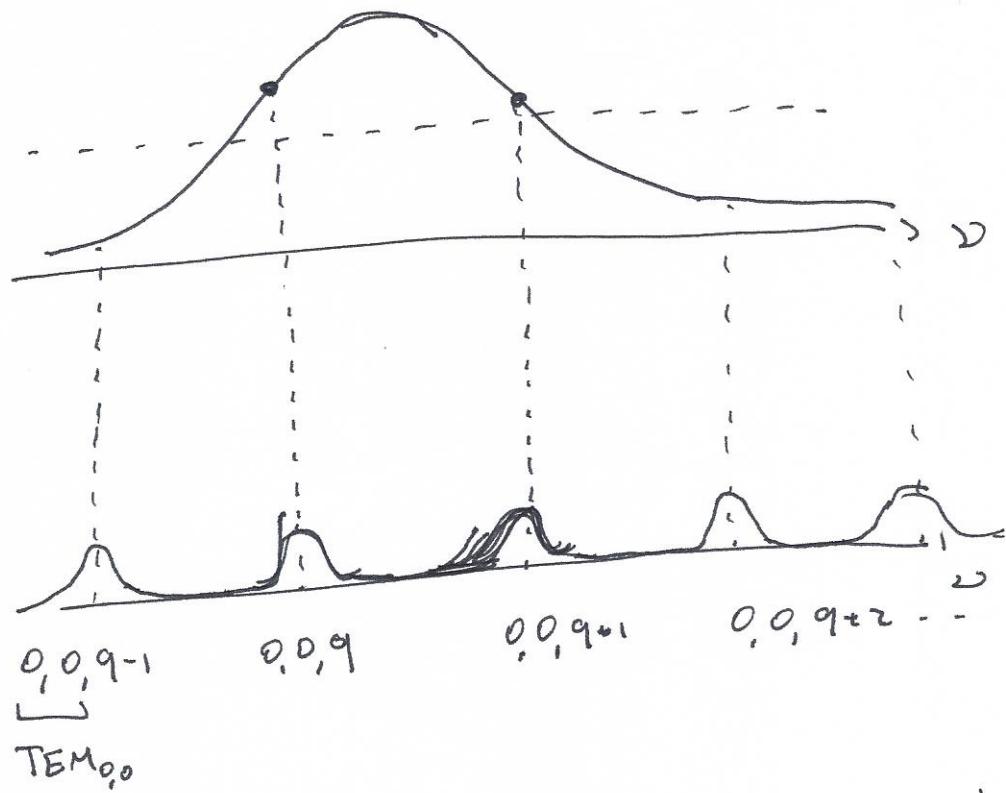


Mas, os fôtons só emitidos em qualquer direção, mas só aqueles dentro do ângulo sólido oscilante

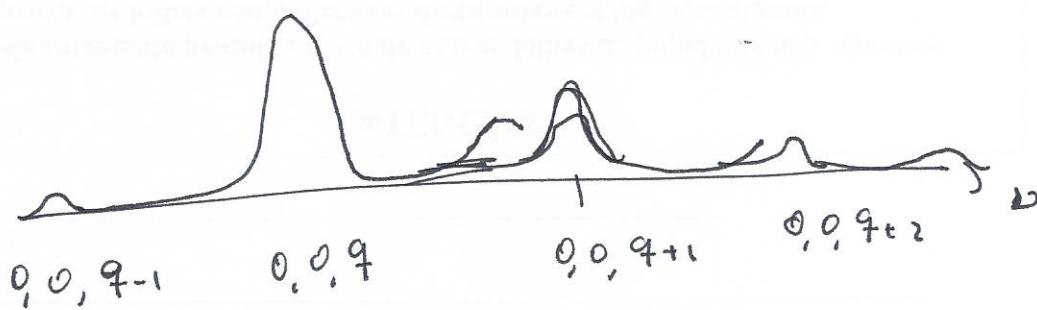
$$\Delta\Omega \approx \frac{\pi \cdot 0,5^2}{2^2 \cdot (12,5)^2} \approx 3 \cdot 10^{-3} \quad \therefore \quad \frac{d\Omega}{4\pi} \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

ou seja, ainda temos um nº grande de modos entretanto "escollhi" do modo que oscila e segue aquele que tem a melhor relação $\Delta\nu/\alpha$ ou seja, aquele cujo gás supera perdas de maneira mais eficiente.

ou seja:



No que os modos $0,0,q$ e $0,0,q+1$ tem $\rho_o(\nu) > \alpha$ e os outros NÃO, assim, após alguns voltos, o espeelho torna-se



com por s $0,0,q$ $\checkmark \frac{\rho_o(\nu_{0,0,q})}{\alpha} > \frac{\rho_o(\nu_{0,0,q+1})}{\alpha}$, esse modo é mais simplificado.

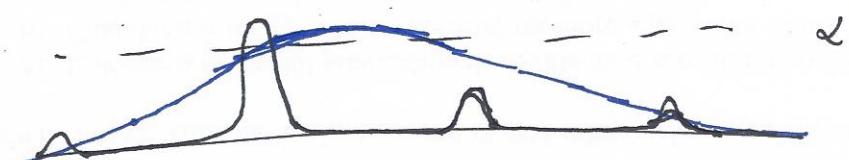
Note que, se $\rho_{0,4} = 4$ e $\rho_{0,4+1} = 2$,
o gauso é tal que $R_1 R_2 e^{2\rho_{0,4} \ln 2} = 4$, apóis
10 passageus pelo covidode, $I_{10,4} \approx 10^6 I_{0,4}$

E, se para $q+1$ temos que $R_1 R_2 e^{2\rho_{0,4+1} \ln 2} = 2$,
apóis os mesmos 10 passageus pelo covidode e'
 $I_{10,q+1} \approx 10^3 I_{0,q+1}$

Da segü, o modo q c' mto mais amplificado que o
q+1! Além disso, o gauso NÃO é infinito (obviamente)
e acaba saturando! Isso ocorre pq quando $\rho(v) \neq \rho(v)$
o populaçō em N_2 e N_1 mudan.

Para uns intensidade suficientemente altas, toda vez
que um fôton é emitido outro é absorvido e vice-
versa, estabelecendo um equilíbrio. Isso é intuitivo de
se pensar pois cada vez que um fôton é emitido
e se "joga" no laser, $N_2 - N_1$ diminui 2 unidades.

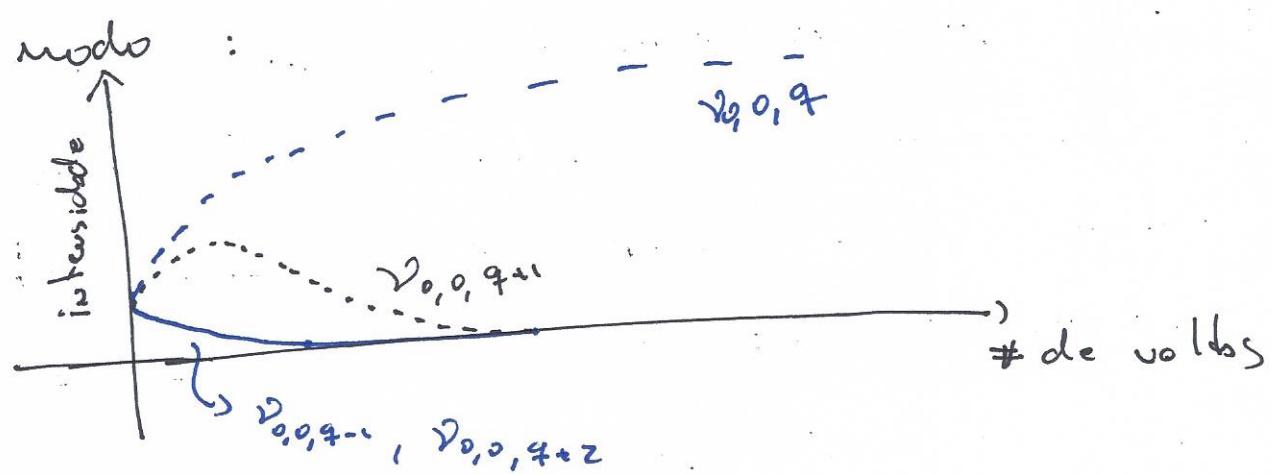
Com isso, no equilíbrio temos que $\rho(v_q) = \alpha$



Para um sistema com absorções homogêneas $\rho(v)$ diminui em magnitude mas não muda o formato, isso ocorre por que, nesse sistema, todos emissores se comportam iguais e o fato de algum emitir em v_g fornece os outros a emitirem o mesmo v_g , diminuindo igualmente a chance dos outros v 's.

Daí sejá, podemos esquematizar o que ocorre com

os modos :

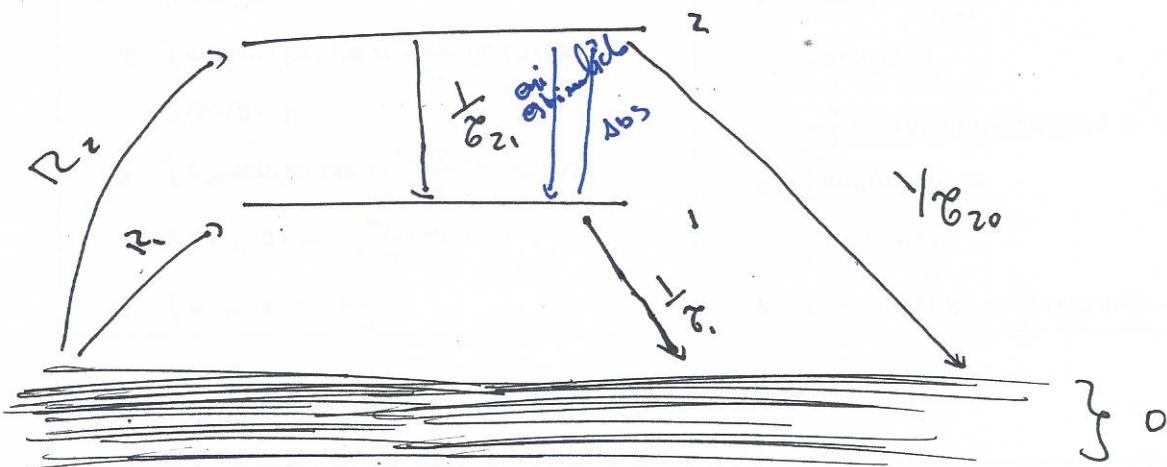


Com isso, só o modo $v_{0,0,q}$ é amplificado acima dos limites da emissão espontânea e a largura de linko desse laser seria simplesmente, por Δv ! Aqui eu escrevo assim, pois no caso real, pequenas flutuações térmicas, mecânicas, etc podem causar um absorção maior que este limite.

Uma área ativa de pesquisa em lasers é reduzir as flutuações para obter sistemas com Δv próximo do limite!

Solução de gás

Vamos pensar no seguinte sistema: Dois níveis 2 e 1 que são responsáveis pelas emissões totais. E um nível 0 que é nosso reservatório de átomos em seco: $N_0 \gg N_1, N_2$



Vamos assumir que R_1 é taxa de população de $\underline{1}$ para qualquer outro nível que não seja de $\underline{2}$, R_2 é a taxa de população do estado $\underline{2}$.

Assumimos também que $\underline{1}$ pode deixar para 0 com taxa γ_{20} (para qualquer efeito)

Chamamos de γ_{21} a taxa com a qual a população de 2 deixa para $\underline{1}$ por qualquer efeito menos emissão estimulada.

A taxa com a qual o estado 2 perde população é

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_{20}} \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

Lembraendo que $B_{21} g_2 g(v) = \frac{\sigma(v) I_0}{h\nu}$

podemos escrever as equações de taxa para 2 e 1:

$$\frac{dN_2}{dt} = R_2(t) - \underbrace{\frac{N_2}{\tau_2}}_{\text{graus de população}} - \underbrace{\frac{\sigma(v) I_0}{h\nu} (N_2 - N_1)}_{\substack{\text{perda por} \\ \text{em. espontânea ou} \\ \text{outros processos}}} \quad \text{Absorção de } 1 \rightarrow 2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = R_1(t) + \underbrace{\frac{N_2}{\tau_{21}}}_{\substack{\text{graus de} \\ \text{população de outras} \\ \text{fontes}}} + \underbrace{\frac{\sigma(v) I_0}{h\nu} (N_2 - N_1)}_{\substack{\text{população proveniente} \\ \text{população vinda de Emissão espontânea} \\ \text{de } 2 \rightarrow 1}} - \underbrace{\frac{N_1}{\tau_1}}_{\substack{\text{população per-} \\ \text{dida de } 1 \rightarrow 0}} \quad \text{Absorção de } 1 \rightarrow 2$$

As taxas $R_1(t)$ e $R_2(t)$ são diretamente relacionadas à forma de bombeio (excitação) do meio de graus. Apesar de poder se tornar bastante complexa, a solução das equações de taxa, para casos especiais, pode nos fornecer importantes informações sobre o ~~sist~~ funcionamento dos lasers.

Caso 1 Vamos assumir uma situação com $I_{D=0}$

$$\text{e } R_1(t) = 0 \quad (\text{o membro não pode } \pm) \quad \text{e } R_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ R_{20} & t \geq 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\frac{dN_2}{dt} = R_{20} - \frac{N_2}{\tau_{22}} \quad \therefore$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{N_2}{\tau_{22}} = R_{20} \Rightarrow N_2(t) = R_{20}\tau_{22}(1 - e^{-t/\tau_{22}})$$

p/ N_1 temos: $\frac{dN_1}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{N_1}{\tau_1} \quad \therefore$

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1}{\tau_1} = R_{20} \cdot \frac{\frac{\phi_{21}}{\tau_{22}}(1 - e^{-t/\tau_{22}})}{\tau_{21}} \quad \therefore$$

$$N_1(t) = N_{1n}(t) + N_{1p}(t)$$

Assim, $N_{1p}(t) = A + Be^{-t/\tau_2}$

$$N_{1n}(t) = Ce^{-t/\tau_1}$$

$$\therefore \frac{dN_{1p}}{dt} = -\frac{B}{\tau_2}e^{-t/\tau_2} \Rightarrow A = R_{20} \cdot \phi_{21} \cdot \tau_1$$

$$B \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right) = -R_{20} \cdot \phi_{21} \quad \therefore$$

$$B = -R_{20} \phi_{21} \tau_1 \left(\frac{1}{1 - \tau_1/\tau_2} \right)$$

Assim

$$N_1(0) = 0 = C + A + B \therefore C = -A - B$$

$$C = R_{20} \phi_{21} \mathcal{T}_1 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_2}} \right) = R_{20} \phi_{21} \mathcal{T}_{11} \left(\frac{\mathcal{T}_1 / \mathcal{T}_2}{1 - \mathcal{T}_1 / \mathcal{T}_2} \right)$$

$$N_1(t) = R_{20} \phi_{21} \mathcal{T}_{11} \left[1 + \frac{\mathcal{T}_1 / \mathcal{T}_2}{1 - \mathcal{T}_1 / \mathcal{T}_2} e^{-t/\mathcal{T}_1} - \frac{1}{1 - \mathcal{T}_1 / \mathcal{T}_2} e^{-t/\mathcal{T}_2} \right]$$

Note que se $t \rightarrow \infty$ $N_2(\infty) \rightarrow R_{20} \mathcal{T}_2$

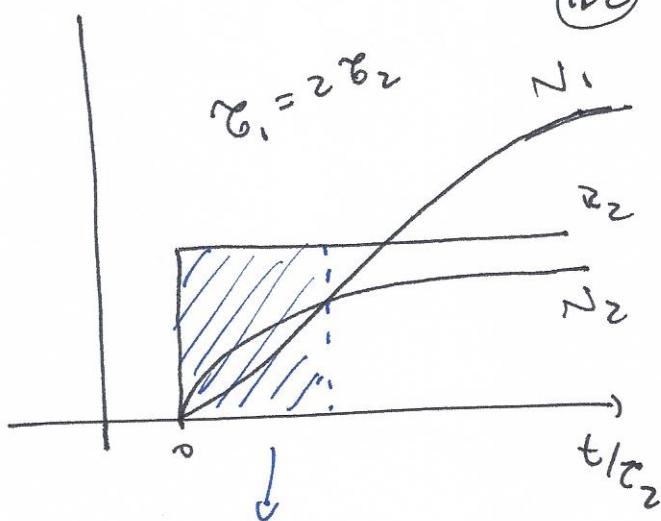
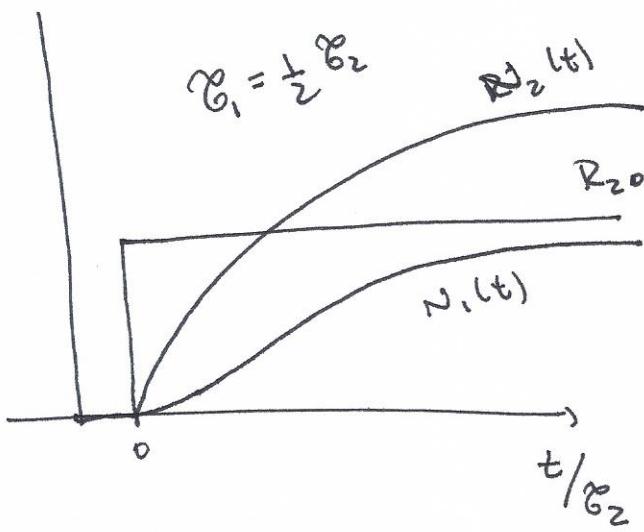
$$N_1(\infty) \rightarrow R_{20} \cdot \mathcal{T}_2 \cdot \frac{\mathcal{T}_1}{\mathcal{T}_{21}}$$

tipicamente, $\mathcal{T}_{21} \ll \mathcal{T}_{20} \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{T}_2} \approx \frac{1}{\mathcal{T}_{21}} \therefore$

$$N_2(\infty) \approx R_{20} \mathcal{T}_2$$

$$N_1(\infty) \approx R_{20} \mathcal{T}_1$$

Temos então que se $\mathcal{T}_2 > \mathcal{T}_1$, $N_2(\infty) > N_1(\infty)$
 e isso ocorre entre os tempos de vida é favorável
 ao Ra^{232} . Para $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$, $N_1(\infty) > N_2(\infty)$ não pode
 haver um certo ~~tempo~~ intervalo de tempo no
 qual $N_2(t_1 \leq t \leq t_2) > N_1(t_1 \leq t \leq t_2)$, portanto, havendo
 gás no neste tempo certo.



Só vale operar ter
bombear nesse fixo
temporal

Note que isso faz sentido pois, se $\gamma_1 < \bar{\gamma}_2$, a população em $\underline{1}$ cresce mais rápido que $\underline{2}$ e é capaz de repopular $\underline{1}$.
Consequentemente, $N_1 < N_2$.

No caso do laser de Nd:YAG $\bar{\gamma}_2 \approx 255\mu s$ e $\bar{\gamma}_1 \approx 30\mu s$

ou seja, $\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_2} \approx 10^{-4}$ \therefore podemos considerar $\bar{\gamma}_1 \rightarrow 0$ e,

consequentemente, $N_1 \approx 0$!

Caso 2: Vamos levar agora I_0 como constante e $G_1 = 0$.

~~Então~~ Isto significa que $N_1 = 0$ e todo ~~o~~ a população de N_1 decai rapidamente para N_0 .

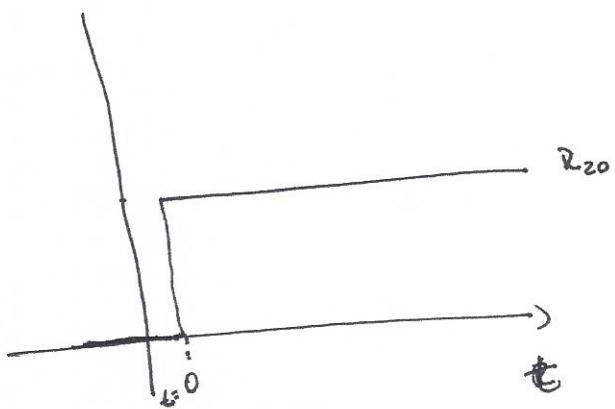
$$\text{Assim } \frac{dN_1}{dt} = 0 \text{ pois } N_1 = 0$$

$$\text{e } \frac{dN_2}{dt} = R_{20}(t) - \frac{N_2}{G_2} - \frac{\sigma(\nu) \cdot I_0}{h\nu} N_2 \text{ ou ainda,}$$

$$\frac{dN_2}{dt} + \frac{1}{G_2} \left(1 + \frac{\sigma I_0 \cdot G_2}{h\nu} \right) N_2 = \underbrace{R_{20}(t)}_{\text{função decresc!}} =$$

$$\frac{\sigma G_2}{h\nu} = \frac{1}{I_s}$$

Assumindo $N_2(0) > 0$



temos:

$$N_2(t) = A + B e^{-\frac{1}{G_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right) t}$$

$$\text{onde } N_2(0) = 0 \quad \therefore B = -A \quad \text{e} \quad A \cdot \left(\frac{1}{G_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right) \right) = R_{20}$$

solução condizível

$$\text{Assim, } N_2(t) = \frac{R_{20} G_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \cdot \left\{ 1 - e^{-\frac{1}{G_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right) t} \right\}$$

Agora podemos analisar as situações como função de I_p e I_s .

Se $I_p \ll I_s \Rightarrow N_2(t) \approx R_{20} \gamma_2 (1 - e^{-t/\gamma_2})$ que é praticamente independente de I_p

Agora, se $I_p \approx I_s$ $N_2(\infty) = \frac{R_{20} \gamma_2}{2}$ e o devido é com $\gamma_2' = \frac{\gamma_2}{1 + \left(\frac{I_p}{I_s}\right)}$ ou seja, quanto maior I_p , menor γ_2' , o que faz sentido pois quanto maior I_p , mais fácil ter emissões estimuladas e menos tempo a população fica em N_2 . Tanto que, se $I_p \gg I_s$, $\gamma_2' \rightarrow 0$ o que indica que $\cancel{N_2(\infty)}$ é muito pequeno.

Caso 3 Vamos assumir que I_p é um pulso que dura $T \gg \gamma_2$, ou seja, $I_p(t) = \begin{cases} I_p & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Assim, mantendo $\gamma_1 = 0$, ~~assumindo~~ $R_{20} = \text{constante}$, temos

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2}{\gamma_2} - \frac{G}{h\nu} \cdot I_p(t) N_2 + R_{20}(t)$$

Com isso, temos dois problemas para resolver:

1) para $0 \leq t \leq T$ os resultados são idênticos ao caso 2

com $N_2(0) = R_{20} \gamma_2$ pois se $t < 0$ $I_p = 0$ mas $R_{20}(t) = R_{20}$

Assim,

$$N_2(t) = A + B e^{-\frac{t}{\tau_2}} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right) t$$

p/ $t=0$ temos $N_2(0) = R_{20} \tau_2 \therefore$

e a solução do particular ainda é: $\frac{R_{20} \tau_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}}$ \therefore

$$N_2(0) = R_{20} \tau_2 = \frac{R_{20} \tau_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}} B \quad \cancel{-\frac{t}{\tau_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right)}$$

$$\therefore B = \frac{I_0}{I_s} \cdot \frac{R_{20} \tau_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \Rightarrow N_2(t) = \frac{R_{20} \tau_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \cdot \left(\frac{I_0}{I_s} e^{-\frac{t}{\tau_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right)} + 1 \right)$$

2)

p/ $t > T$ temos $I_y = 0 \therefore$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2}{\tau_2} + R_{20} \therefore N_2(t) = A + B e^{-t/\tau_2}$$

onde $A = R_{20} \tau_2 \Rightarrow$

$$N_2(t) = R_{20} \tau_2 + B e^{-t/\tau_2} \therefore$$

p/ $t = T$ temos $N_2(T) = \frac{R_{20} \tau_2}{1 + \frac{I_0}{I_s}} \left(\frac{I_0}{I_s} e^{-\frac{T}{\tau_2} \left(1 + \frac{I_0}{I_s} \right)} + 1 \right) = R_{20} \tau_2 + B e^{-T/\tau_2}$

com isso, $B = -\frac{I_0}{I_s} R_{20} \tau_2 \left(e^{T/\tau_2} + e^{\frac{T}{\tau_2} \frac{I_0}{I_s}} \right)$

$$e \quad N_2(t) = R_{20} \mathcal{E}_2 - \frac{I_0}{I_S} \frac{R_{20} \mathcal{E}_2}{1 + \frac{I_0}{I_S}} \left(e^{\frac{I}{\mathcal{E}_2}} + e^{\frac{-I \cdot I_0}{\mathcal{E}_2 \cdot I_S}} \right) e^{-t/\mathcal{E}_2}$$

$t > T$

Note que para $t < T$ o tempo de resposta é mais rápido $\mathcal{E}_2' = \frac{\mathcal{E}_2}{1 + \frac{I_0}{I_S}}$ e o retorno, quando $I_0 = 0$ é com o tempo \mathcal{E}_2 .

Os sejam, a presença de I_0 faz a população de N_2 cair mais rápido (é e- mais rápido quando maior o I_0) que isso, para calcular o limite no qual termos emitidos estacionários, esse efeito pode ser negligenciado! Mas, não pode ser desprezado no cálculo da dinâmica do laser pois, uma vez que termos laser, esse termo possa a ser o dominante.

Caso 4: Quando $\frac{d}{dt} = 0$ p/ N_2 e N_1 \therefore

$$R_2 - \frac{N_2}{\mathcal{E}_2} - \sigma \frac{(v) \cdot I_0}{h\nu} (N_2 - N_1) = 0$$

$$R_1 + \frac{N_2}{\mathcal{E}_2} - \frac{N_1}{\mathcal{E}_1} + \sigma \frac{(v) \cdot I_0}{h\nu} (N_2 - N_1) = 0$$

on Sejst,

$$N_1 = N_2 + N_2 \cdot \frac{h\nu}{\sigma(v) G_2 I_\nu} - \frac{R_2 h\nu}{G(v) I_\nu}$$

e

$$R_1 + \frac{N_2}{G_{21}} - \frac{N_2}{G_1} - N_2 \frac{h\nu}{\sigma(v) I_\nu} \frac{1}{G_1 G_2} + \frac{R_2 h\nu}{\sigma(v) I_\nu} \frac{1}{G_1} + \cancel{\frac{\sigma(v) I_\nu}{h\nu} N_2} +$$

$$- \cancel{\frac{\sigma(v) I_\nu}{h\nu} N_2} - \frac{N_2}{G_2} + R_2 = 0$$

$$\therefore N_2 \cdot \left(\frac{1}{G_{21}} - \frac{1}{G_1} - \frac{h\nu}{\sigma I_\nu} \cdot \frac{1}{G_1 G_2} - \frac{1}{G_2} \right) + R_1 + R_2 \left(\frac{h\nu}{\sigma I_\nu} \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) = 0$$

$$\therefore N_2 = \frac{R_1 \cdot \frac{\sigma I_\nu}{h\nu} + R_2 \left(\frac{\sigma I_\nu}{h\nu} + \frac{1}{G_1} \right)}{\frac{1}{G_1 G_2} \left[1 + \left(G_1 + G_2 - \frac{G_1 G_2}{G_{21}} \right) \left(\frac{\sigma I_\nu}{h\nu} \right) \right]}$$

$$\therefore N_1 = \frac{R_1 \left(\frac{1}{G_2} + \frac{\sigma I_\nu}{h\nu} \right) + R_2 \left(\frac{1}{G_{21}} + \frac{\sigma I_\nu}{h\nu} \right)}{\frac{1}{G_1 G_2} \left[1 + \left(G_1 + G_2 - \frac{G_1 G_2}{G_{21}} \right) \left(\frac{\sigma I_\nu}{h\nu} \right) \right]}$$

Assim, (lembremos que temos $g_2 = g_1$, nesses exemplos)

$$\frac{N_2 - N_1}{1 + \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{21}} \right) \frac{\sigma' I_0}{h\nu}} = R_2 \sigma_2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{21}} \right) - R_1 \sigma_1$$

Lembremos que definimos

$$\rho(\nu) = \sigma(\nu) \cdot \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

e $\rho_0(\nu)$ o coeficiente de ganho \rightarrow baixas I_ν :

$$\rho_0(\nu) \approx \sigma(\nu) \cdot \left(R_2 \sigma_2 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{21}} \right) - R_1 \sigma_1 \right)$$

quanto maior
 σ_2 , maior ρ_0
e quanto
menor σ_1 , maior
 ρ_0

com $I_\nu \ll \frac{h\nu}{\sigma_1 \sigma_2} \Rightarrow$ o denominador ≈ 1 . (pequenos sinais!)

Agora, para qualquer intensidade, o coeficiente de ganho

é definido com:

$$\rho(\nu) = \frac{1}{I_\nu} \cdot \frac{dI_\nu}{dz} = \frac{\rho_0(\nu)}{1 + I_\nu / I_{s(\nu)}}$$

onde $I_{s(\nu)}$ é a ~~intensidade~~ intensidade de saturaçāo

e, comparando com $N_2 - N_1$, temos:

$$I_s(v) = \frac{h\nu}{\sigma(v)C_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2} \cdot \left(1 - \frac{C_2}{C_{21}}\right)}$$

Note que $I_s(v) = \frac{h\nu}{\sigma(v)C_2}$ se $C_1 \ll C_2$

Note também que se $I_v = I_s$, temos $\rho(v) = \frac{\rho_0(v)}{2}$
e se $I_v \gg I_s$, $\rho(v) \rightarrow 0$

Agora, a saturação depende de v pois existe sempre um alongamento homogêneo e/ou um inhomogêneo

Para o caso homogêneo, no qual $\bar{g}(v) = \frac{(\Delta v/2)^2}{(v-v_0)^2 + (\Delta v/2)^2}$

O I_s é never próximo de v_0 , e a lei da saturação pode ser escrita como:

$$\frac{1}{I_v} \cdot \frac{dI_v}{dz} = \frac{\rho_0(v)}{1 + \bar{g}(v) \cdot \frac{I_v}{I_s}}$$

Se sej, se entrar um intensidade I_1 no meio de gás, de comprimento l_1 , qual será a intensidade na saída, I_2 ?

$$\frac{1}{I_v} \cdot \left(1 + \bar{g}(v) \frac{I_v}{I_s}\right) dI_v = \rho_0(v) dz$$

Com isso,

$$\int_{I_s}^{I_2} \frac{1}{I_s} + \frac{\bar{g}(v)}{I_s} dI_v = n_0(v) \cdot I_g$$

$$\therefore \ln\left(\frac{I_2}{I_s}\right) + \bar{g}(v) \cdot \left[\frac{I_2 - I_s}{I_s} \right] = n_0(v) I_g$$

Chamando $G = \frac{I_2}{I_s} = G_{anho}$, $\ln G + \bar{g}(v) \cdot \frac{I_s}{I_s} \cdot (G-1) = n_0(v) I_g$

com isso, se $I_s \ll I_g$, o segundo termo é muito pequeno

e temos

$$G(v) = e^{n_0(v) I_g}$$

Agora, se $I_s \approx I_g$ $G(v)$ diminui, ante que, se $I_s \gg I_g$, o segundo termo é maior que o primeiro

$$e: I_2 = I_s + \left[\frac{n_0(v)}{\bar{g}(v)} \cdot I_s \right] I_g$$

escrevendo entao $n_0(v) = \left(R_2 \bar{g}_2 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) - R_1 \bar{g}_1 \right) \cdot \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v_0) \bar{g}(v)}$

$$e I_s = \frac{h v}{\sigma(v_0) \bar{g}_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\bar{g}_1}{\bar{g}_2} \left(1 - \frac{\bar{g}_2}{\bar{g}_{2u}} \right)}$$

temos que $\frac{I_2 - I_1}{lg} = \frac{f_0(v) \cdot I_s}{\bar{g}(v)}$ é intensidade ganha por unidade de comprimento

(17)

$$= \frac{\left[R_2 \bar{C}_2 \left(1 - \frac{C_1}{\bar{C}_2} \right) - R_1 \bar{C}_1 \right] f(v) \cdot \bar{g}(v) \cdot h\nu}{R_{eff} \cdot \left(1 + \frac{C_1}{\bar{C}_2} \left(1 - \frac{C_2}{\bar{C}_{21}} \right) \right)}$$

$$= h\nu \left[\frac{R_2 \bar{C}_2 \left(1 - \frac{C_1}{\bar{C}_{21}} \right) - R_1 \bar{C}_1}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2 - \bar{C}_1 \bar{C}_2 / \bar{C}_{21}} \right]$$

R_{eff}

Onde R_{eff} é a taxa efetiva de bombeio para a criação de um fóton com $h\nu$.

Note que se $C_1 \rightarrow 0$ ($C_1 \ll C_2$) e $R_1 \ll R_2$

$R_{eff} \rightarrow R_2$ o que é bastante lógico, mas ver que esse é o limite máximo