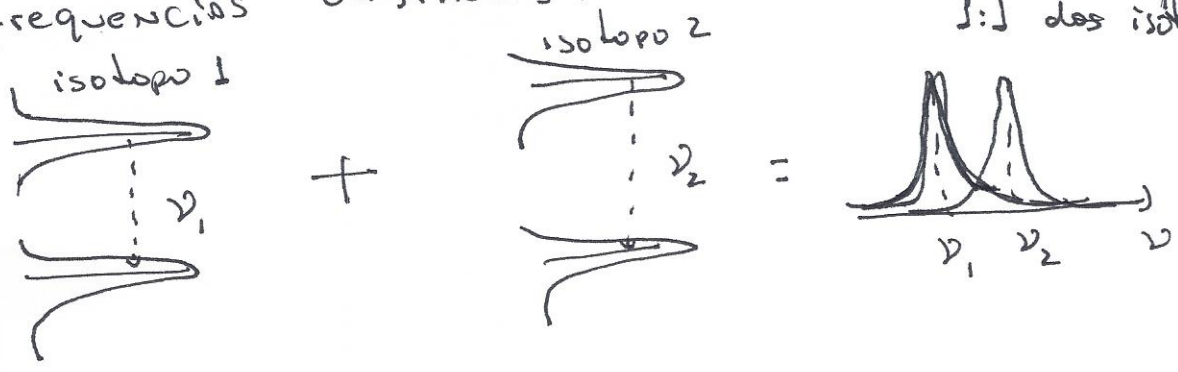


Vamos agora considerar a situação que ocorre na maioria dos sistemas, ou seja, quando existe alargamento inhomogêneo.

Neste caso, podemos entender o sistema como um conjunto de "sub-sistemas" cada um com uma largura homogênea $\Delta\nu_h$ e centrado em uma frequência ν_i .

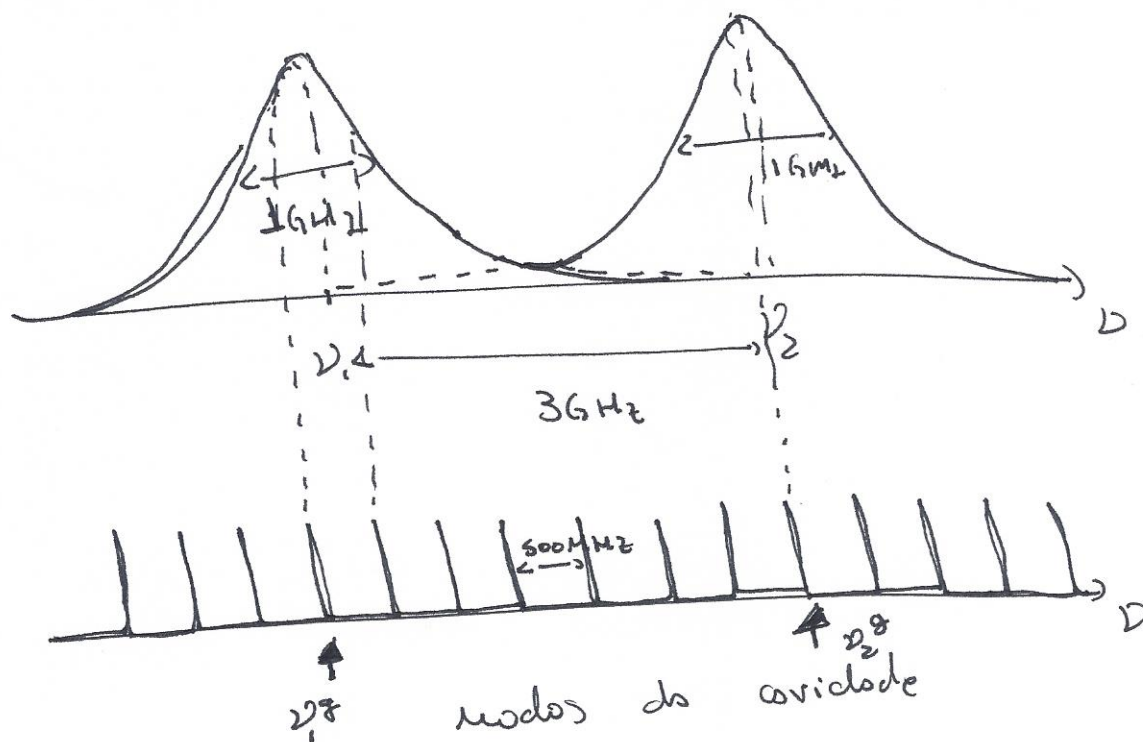
Seja assim, o fato de um subsistema oscilar na frequência $\nu_i^{g \rightarrow g'}$, $g = g_{\text{atômico}}$, NÃO necessariamente suprime a oscilação de uma frequência $\nu_j^{g'}$ que é a preferencial para um outro subgrupo

Vamos supor um sistema hipotético de um laser composto por dois subsistemas (exemplo, dois isótopos de um átomo) que podem emitir luz de uma mesma transição mas com frequências distintas: (Imaginemos uma fração de 1:1 dos isótopos)



Se $\Delta\nu_h = 1 \text{ GHz}$; $\nu_1 - \nu_2 = 3 \text{ GHz}$ e o FSR da cavidade é 500 MHz

Então, teríamos a seguinte configuração:



Enquanto o isótopo 1 "força" a emissão em ν_1^g , essa frequência é muito improvável para o isótopo 2, e este irá amplificar ν_2^g e teremos 2 modos oscilando na cavidade!

Por fim, se temos um sistema inhomogêneo, formado por M subsistemas homogêneos (vamos supor que todos os subsistemas tenham largura de linha homogênea $\Delta\nu_h$ certo,

$$g_0(\nu) = A_{21} \frac{g^2}{8\pi m^2} \cdot \frac{2}{\pi \Delta\nu_h} \cdot \left[\frac{f_1}{\cancel{f_1}} \cdot \frac{1}{(\nu - \nu_1)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_h}{2}\right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{f_2}{\cancel{f_2}} \cdot \frac{1}{(\nu - \nu_2)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_h}{2}\right)^2} + \dots + \frac{f_M}{\cancel{f_M}} \cdot \frac{1}{(\nu - \nu_M)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_h}{2}\right)^2} \right] \cdot \left\{ N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right\}$$

onde f_i é a fração da população total que pertence ao subsistema "i"

Assim, temos que a largura de linha total será uma soma de todas as ~~largas~~ distribuições, cada uma com ~~seu~~ o peso de sua fração.

Por fim, lembramos que o coeficiente de ganho para sinais grandes pode ser escrito como

$$\frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dz} = \gamma(\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \bar{g}(\nu) \frac{I_0}{I_s}}$$

No caso em questão o coeficiente de ganho deve ser escrito como a soma das contribuições das sub-populações cada uma com um número $N_{1,2}^m$:

$$\frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dz} = \sum_m \frac{(N_2^m - g_2/g_1 N_1^m) \sigma_h^{(m)}(\nu)}{1 + \frac{\sigma_h^{(m)}(\nu) g_2}{h\nu} I_0} \quad \sigma_h^{(m)}(\nu) \rightarrow \text{cada sub-população}$$

de forma mais precisa, mesmo g_2 pode depender da sub-população m

Agora, se os sub-grupos são acoplados, de forma que eles interagem rapidamente, numa taxa maior que a de emissão estimulada, o sistema pode se comportar como

Aquele com alargamento homogêneo, de modo que (175) a solução seja uniformemente mantendo o alargamento.

Agora, se NÃO SÃO fortemente acoplados, a solução de um subgrupo pode NÃO afetar os outros.

Por exemplo, vamos supor que tenhamos 7 subpopulações separadas por $\Delta\nu_n/2$:

$$\rho_0(\nu) = \frac{A_2}{8\pi n^2} \frac{2}{\pi \Delta\nu_n} \left[0,05 \times \frac{1}{(\nu_0 - \frac{3\Delta\nu_n}{2} - \nu)^2 + (\frac{\Delta\nu_n}{2})^2} + 0,1 \times \frac{1}{(\nu_0 - \frac{2\Delta\nu_n}{2} - \nu)^2 + (\frac{\Delta\nu_n}{2})^2} + 0,20 \times \frac{1}{(\nu_0 - \frac{\Delta\nu_n}{2} - \nu)^2 + (\frac{\Delta\nu_n}{2})^2} + 0,30 \times \frac{1}{(\nu_0 - \nu)^2 + (\frac{\Delta\nu_n}{2})^2} + \dots + 0,05 \times \frac{1}{(\nu_0 + \frac{3\Delta\nu_n}{2} - \nu)^2 + (\frac{\Delta\nu_n}{2})^2} \right] \cdot \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right)$$

$$\text{Assim, } \frac{1}{I_0} \frac{dI_0}{dz} = \frac{\sum_m \left(N_2^m - \frac{g_2}{g_1} N_1^m \right) \sigma_n^m(\nu)}{1 + \frac{\sigma_n^m(\nu) G_2}{h\nu} \cdot I_0}$$

e, ~~caso~~ se escolhermos ~~$I_0 \approx I_{D_0} \approx I_{D_1} \approx I_{D_2} \approx I_{D_3} \approx I_{D_4} \approx I_{D_5} \approx I_{D_6} \approx I_{D_7}$~~

$$\sigma_n^m(\nu) = 2\pi \frac{h\nu}{g_2} \frac{1}{\Delta\nu_n}$$

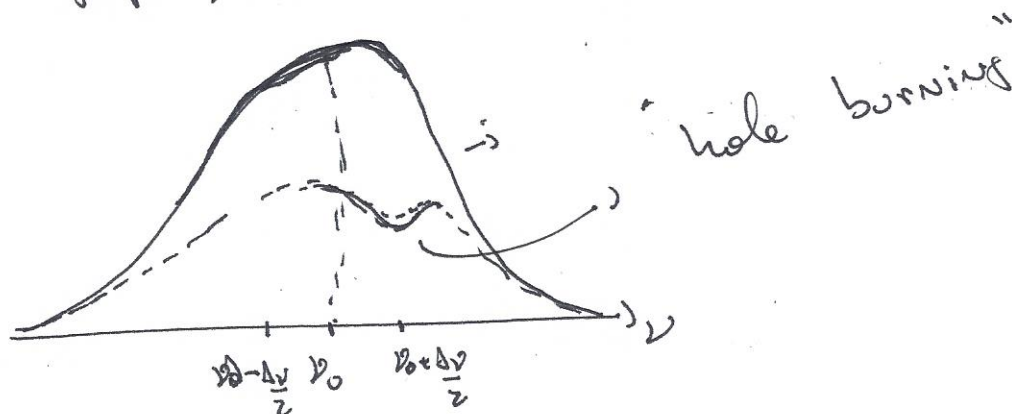
$$I = 2I_s \quad \text{e} \quad \nu = \nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2} \quad \text{temos que}$$

(176)

$$\sigma^5(\nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2}) \propto \frac{1}{(\frac{\Delta\nu_D}{2})^2}, \quad \text{Agora} \quad \sigma^7(\nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2}) \propto \frac{1}{5 \cdot (\frac{\Delta\nu_D}{2})^2}$$

$$\sigma^1(\nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2}) \propto \frac{1}{17 \cdot (\frac{\Delta\nu_D}{2})^2}$$

ou seja, o espectro sofrerá saturação muito mais
para a população N^5 :-

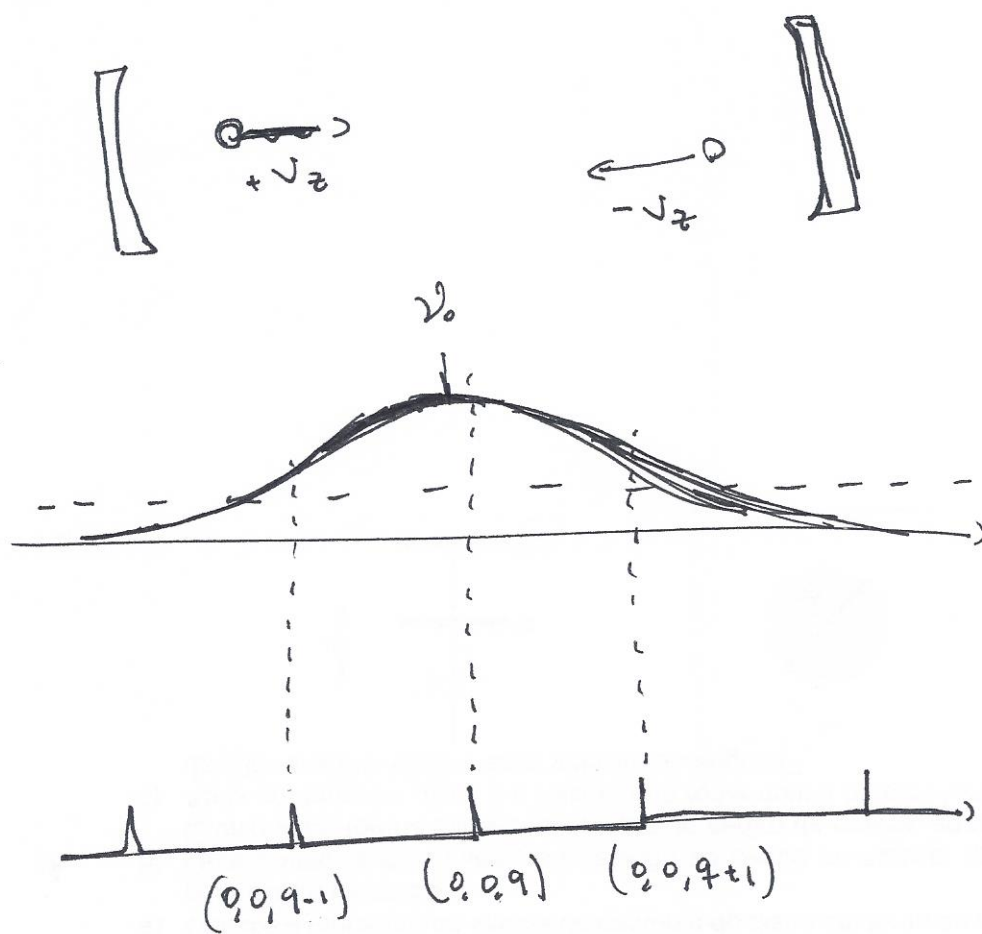


o efeito é como se fizéssemos um "buraco" no
espectro de $\rho(\nu)$

Vamos agora ver um exemplo que ocorre no caso
do alargamento inhomogêneo ser originado pelo efeito
Doppler.

$$\text{Como vimos, } \nu'_0 = \nu_0 \left(1 + \frac{v_z}{c} \right)$$

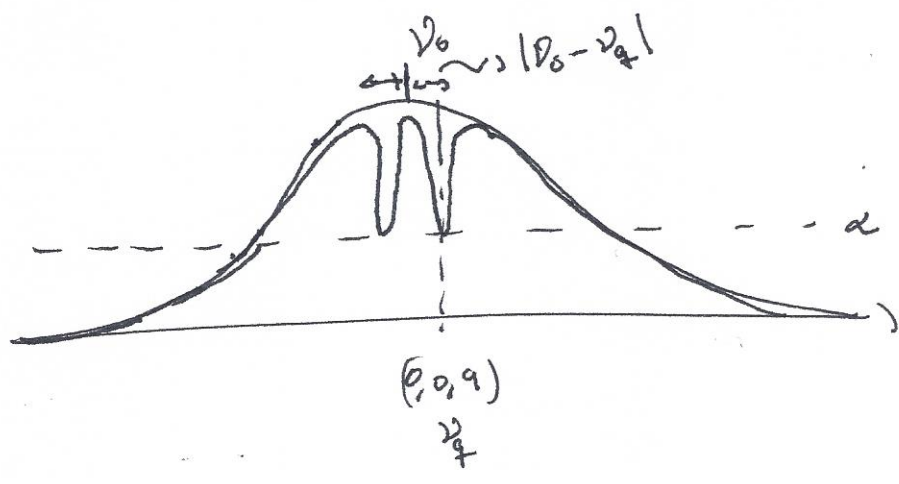
Para o caso de termos um condutor com
 Aléu, a baixa pressão, tem uma mesma probabilidade
 de de termos termos com $+v_z$ e $-v_z$



Vamos analisar o modo $(0,0,9)$ com frequência v_0 .

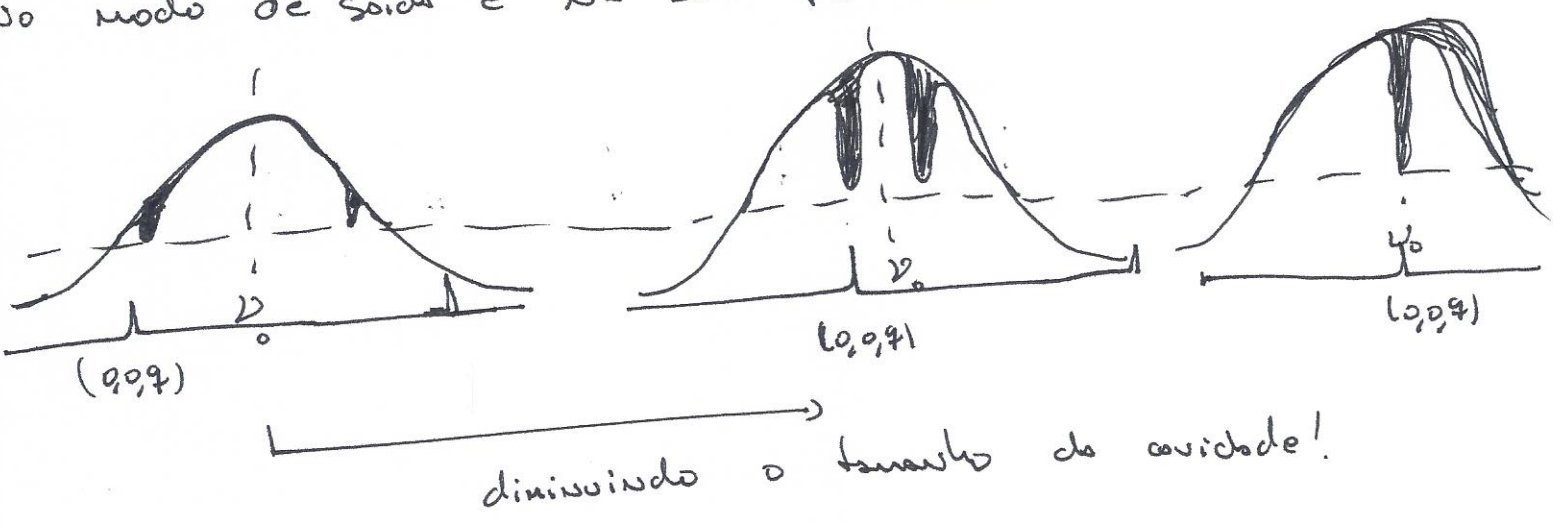
1) quando a onda se propaga na direção $+z$, os áto-
 mos com velocidade v_z tal que $v_0 \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) = v_z$ intera-
 gem com a onda, ~~mas também os átomos com veloci-~~

2) quando a onda se propaga na direção $-z$ e
 a vez dos átomos com $(-v_z)$, afinal no referencial
 do átomos e a mesma física! portanto, o
 espectro ficará



O mesmo vale para os demais modos

Agora, lembrando que o tamanho da cavidade define os modos, podemos ajustar o tamanho da cavidade baseado no modo de saída e na sua potência.



Nem primeiro momento a potência de saída aumenta por o ganho aumenta, mas quando $\nu_q = \nu_0$ só os íons ressonantes interagem e a potência cai abruptamente!

Usando um PZT pode-se ajustar finamente uma cavidade usando esse método!

Oscilação Multimodal

Vamos considerar o caso de um laser de He:Ne cujo $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. Para a operação a temperatura ambiente, o alargamento Doppler da largura de linha da ordem de $1,5 \text{ GHz}$.

Os lasers de He:Ne comerciais tem comprimentos de $\sim 15 \text{ cm}$ até $\sim 75 \text{ cm}$

Se, por exemplo $d = 75 \text{ cm}$, $\text{FSR} = \frac{c}{2d} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0,75} \Rightarrow$

$$\text{FSR} = 200 \text{ MHz}$$

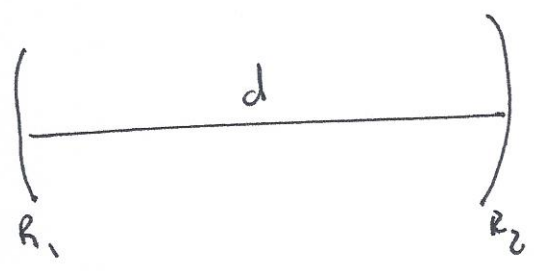
Portanto, para um ganho máximo $g_0(v_0)/\alpha = 2$ temos cerca de 7-8 modos que podem ter ganho na cavidade. E essa vai oscilar multimodo!

Agora, se o laser é menor, digamos com uma cavidade de $15 \text{ cm} \Rightarrow \text{FSR} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 0,15} = 10^9 = 1 \text{ GHz}$, ou seja, para o mesmo $g_0(v_0)/\alpha = 2$ só um modo $\text{TEM}_{0,0,4}$ tem ganho.

Mas, se voltarmos ao resultado p/ um feixe Hermite/Gauss, lembramos que

$$\nu_{m,p,q} = \frac{c}{2nd} \left[q + \frac{1+m+p}{2} \cdot \cos^{-1}(g_1 g_2)^{1/2} \right]$$

onde $g_{1,2} = 1 - \frac{d}{R_{1,2}}$



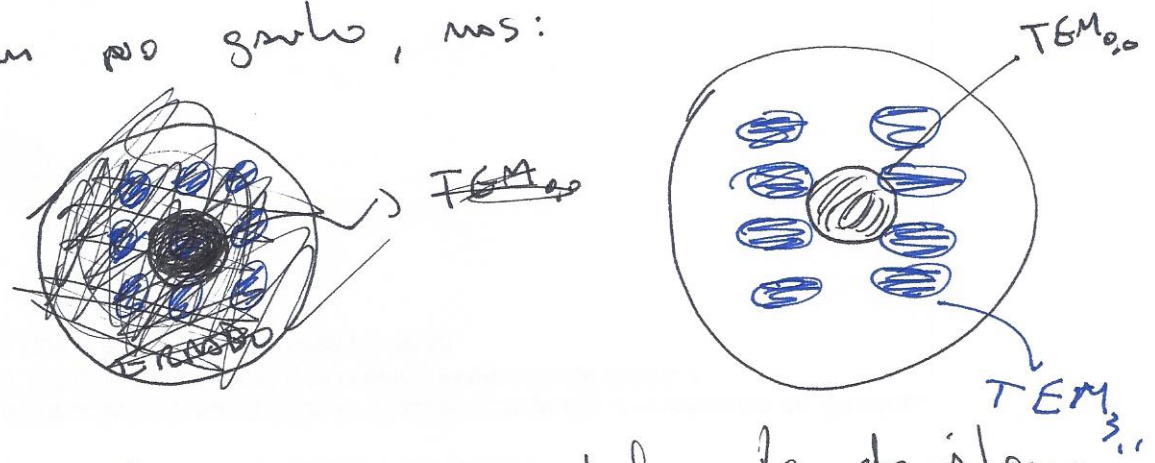
portanto, outros modos TEM_{m,p} podem co-existir na cavidade! por exemplo, se $R_1 = \infty$ e $\frac{d}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ e}$$

$$\nu_{m,p,q} = \frac{c}{2nd} \left[q + \frac{1+m+p}{2} \right]$$

$$\nu_{0,0,q} = \frac{c}{2nd} \left[q + \frac{1}{4} \right] = \nu_{3,4,q-1} = \frac{c}{2nd} \left[q-1 + \frac{1+4}{4} \right]$$

e, note que como ambos ν 's são iguais, eles, em princípio, competem no ganho, mas:



Cada modo excita um grupo diferente de átomos e mesmo neste caso de cavidade pequena, vários modos podem oscilar juntos.

Vamos analisar a saturação de ganho em um sistema com alargamento inhomogêneo de uma forma mais quantitativa. (181)

Lembramos que uma onda com frequência ν interage com átomos que contêm ν dentro de sua largura de linha homogênea e que a largura de linha inhomogênea é uma soma de subpopulações.

Assim, supomos $p(f)df$ como uma fração da população que pode ser invertida de presenças de ondas em ν .

Como cada subgrupo interage com a onda de acordo com sua largura homogênea, podemos escrever o coef. de ganho saturado como:

$$g(\nu, I_\nu) = A_2 \cdot \frac{a^2}{8\pi m^2} \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \cdot \int_0^\infty \frac{p(f) \cdot g_h(\nu, f) df}{1 + \frac{I_\nu}{I_s} \cdot \bar{g}_h(\nu, f)}$$

populações p/ $I_\nu \rightarrow 0$

Neste caso, temos $\int_0^\infty p(f) df = 1$ pois é a soma sobre

todas as frequências.

$$g_h(\nu, f) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta\nu_h}{(f - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_h}{2}\right)^2}$$

$$e \quad \bar{g}_n(\nu, f) = \pi \frac{\Delta \nu_n}{2} \cdot g_n(\nu, f) = \frac{\left(\Delta \nu_n / 2\right)^2}{(f - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_n}{2}\right)^2} \quad (182)$$

de modo que $\bar{g}_n(f, f) = 1$

$$E, \text{ como já vimos, } I_s = \frac{h\nu}{\sigma(\nu) \bar{\sigma}_2 \left(1 + \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1}\right)\right)}$$

Um exemplo de $p(f)$ é a distribuição térmica das velocidades dos átomos que resultam no alargamento Doppler.

Como vimos, a distribuição segue uma gaussiana e

$$P(f) = \underbrace{\sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta \nu_D}}_{\text{constante que surge da normalização}} \cdot e^{-4 \ln 2 \left(\frac{f - \nu_0}{\Delta \nu_D}\right)^2}$$

Uma simplificação da equação $\eta(\nu, I_\nu)$ surge se substituirmos $g_n(\nu, f)$ e $\bar{g}_n(\nu, f)$ de modo que:

$$\int_0^\infty \frac{P(f) \cdot g_n(\nu, f) df}{1 + \frac{I_\nu}{I_s} \bar{g}_n(\nu, f)} = \int_0^\infty \frac{P(f) \cdot g_n(\nu, f) df}{1 + \frac{I_\nu}{I_s} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta \nu_n}{2} \cdot g_n(\nu, f)}$$

Nesse caso,

$$\frac{\Delta \nu_H / 2\pi}{(\nu - \nu)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_H}{2}\right)^2} \rightarrow \delta(\nu - \nu)$$

(184)

$$e \quad \gamma(\nu, I_\nu) = A_{21} \frac{\omega_0^2}{8\pi m^2} \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \frac{\Delta \nu_H}{\Delta \nu_H} \cdot \underbrace{\int_0^\infty P(\nu) \cdot \delta(\nu - \nu) d\nu}_{P(\nu)}$$

$$\therefore \gamma(\nu, I_\nu) = \underbrace{\left[A_{21} \frac{\omega_0^2}{8\pi m^2} \cdot \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \cdot P(\nu) \right]}_{\gamma_0(\nu)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta \nu_H}{\Delta \nu_H}}_1 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{I_\nu}{I_s} \right)^{1/2}}$$

portanto, $\gamma(\nu, I_\nu) = \gamma_0(\nu) \cdot \frac{\Delta \nu_H}{\Delta \nu_H} = \gamma_0(\nu) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{I_\nu}{I_s} \right)^{1/2}}$

Algumas ponderações importantes:

1) note que I_s é ainda aquele que depende $\sigma(\nu_0)$ com largura homogênea. Que para $\mathcal{G}_1 \rightarrow 0$ e escrevo $I_s = \frac{h\nu}{\sigma(\nu_0) \mathcal{G}_2}$

2) lembrando, p/ um sistema homogêneo, $\gamma_h(\nu, I_\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \frac{I_\nu}{I_s}}$
enquanto p/ um sistema inhomogêneo

$$\gamma(\nu, I_\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{\sqrt{1 + \frac{I_\nu}{I_s}}}$$

ou seja, $\gamma(\nu)$ sadurs mais lentamente que $\gamma_n(\nu)$ (185)

Isso ocorre pois a medida que I_ν aumenta, $\Delta\nu_H$ aumenta com $(1 + \frac{I_\nu}{I_s})^{\frac{1}{2}}$, ou seja, mais população contribui!

Outro caso limite ocorre se $\Delta\nu_H \gg \Delta\nu_D$ o que significa que $I_\nu \gg I_s$ ou que $\Delta\nu_H$ é muito grande assim, no intervalo de integração de $p(f)df$, a Lorentziana varia pouco e pode ser tirada do integral e:

$$p(\nu, I_\nu) = \frac{A_{21} g_2^2}{8\pi m^2} \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \cdot \frac{\Delta\nu_H}{2\pi \left[(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2 \right]} \cdot \int_0^{\infty} p(f) df$$

Com isso,

$$p(\nu, I_\nu) = \frac{A_{21} g_2^2}{8\pi m^2} \cdot \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \cdot \frac{\frac{\Delta\nu_H}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{I_\nu}{I_s} \right)}$$

ou ainda

$$p(\nu, I_\nu) = \underbrace{\frac{A_{21} g_2^2}{8\pi m^2} \cdot \left(N_2^0 - \frac{g_2}{g_1} N_1^0 \right) \cdot \frac{\frac{\Delta\nu_H}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2}}_{\gamma_0(\nu)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1 + \frac{I_\nu}{I_s} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu_H}{2} \right)^2} \right]} \right) \therefore$$

$$\gamma(\nu, I_\nu) = \frac{\gamma_0(\nu)}{1 + \frac{I_\nu}{I_s} \cdot \bar{g}_H(\nu)}$$