Fundamentos de teoria quântica

Introdução à probabilidade

Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

Experimentos aleatórios

Um *experimento aleatório* é um experimento cujo resultado (por alguma razão) não pode ser determinado previamente.

Os modelos matemáticos para a descrição de tais experimentos envolvem três ingredientes básicos: um *espaço amostral*, um conjunto de *eventos*, e uma *probabilidade*.

Espaço amostral

O *espaço amostral* Ω de um experimento aleatório é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

Eventos

Um *evento* é uma coleção de resultados do experimento, um subconjunto do espaço amostral.

O conjunto de todos os eventos será denotado F.

Dois eventos A e B que não têm resultados em comum, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, são ditos *eventos disjuntos*.

Probabilidade

Uma *probabilidade* é uma função $p : F \to [0, 1]$, que designa um número não-negativo para cada evento, satisfazendo os seguintes axiomas:

- $p(A) \geq 0$;
- $p(\Omega) = 1$;
- para toda sequência $A_1, \ldots, A_n$ de eventos disjuntos,

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right). \tag{1}$$

Teorema

Sejam A e B dois eventos. Então:

- $p(\emptyset) = 0$;
- $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$;
- $p(A) \leq 1$;
- $p(A^c) = 1 - p(A)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Probabilidade condicional

Sejam A e B dois eventos. A probabilidade de ocorrência de A, *condicionada* à ocorrência de B, é definida como

$$p\left(A|B\right) = \frac{p\left(A \cap B\right)}{p\left(B\right)}. \tag{2}$$

Assim, segue que

$$p\left(A, B\right) = p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right) p\left(B|A\right). \tag{3}$$

Regra do produto

Seja $A_1, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos com $p\left(A_1, \ldots, A_{n-1}\right) > 0$.
Então

$$p\left(A_1, \ldots, A_n\right) = p\left(A_1\right) p\left(A_2 | A_1\right) \ldots p\left(A_n | A_1, \ldots, A_{n-1}\right). \qquad (4)$$

Lei da probabilidade total

Seja $B_1, \ldots, B_n$ uma *partição* do espaço amostral, ou seja, $B_1, \ldots, B_n$ são disjuntos e sua união é igual a Ω. Então

$$p\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A, B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A | B_i\right) p\left(B_i\right). \tag{5}$$

Teorema de Bayes

O *Teorema de Bayes* relaciona a probabilidade de um evento com conhecimento prévio relacionado a ele. É formulado como:

$$p\left(A|B\right) = \frac{p\left(B|A\right)p\left(A\right)}{p\left(B\right)}. \tag{6}$$

Independência

Os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são ditos (mutuamente) *independentes* se

$$p(A_1, \ldots, A_n) = p(A_1) \ldots p(A_n). \tag{7}$$

Variável aleatória

Uma *variável aleatória* é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Variáveis aleatórias podem ser vistas como observações de experimentos aleatórios que ainda não foram realizados.

Podem ser contínuas ou discretas. Elas são denotadas por letras maiúsculas, e, valores específicos, pela mesma letra minúscula. Em contextos em que não há ambiguidade, somente a letra minúscula será adotada.

Distribuição de probabilidade

Seja X uma variável aleatória, assumindo valores em Ω_X. Se podemos especificar todas as probabilidades de todos os possíveis valores de X, dizemos que temos a *distribuição de probabilidades*, ou o *vetor de probabilidades*, de X:

$$\{p(x) | x \in \Omega_X\}. \tag{8}$$

Distribuição conjunta

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Pode-se definir a *distribuição conjunta de probabilidades* de X e Y como a coleção de todos os possíveis pares de valores de X e Y:

$$\{p\left(x, y\right) | x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}. \tag{9}$$

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Pode-se definir as *distribuições de probabilidades de X condicionadas a Y* como:

$$\left\{p\left(x|y\right)\left|x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\right.\right\}. \tag{10}$$

Note que, para cada valor $y \in \Omega_Y$, tem-se uma distribuição de probabilidades de X.

Marginalização

Dada uma distribuição conjunta de X e Y, pode-se obter a *distribuição marginal* de X através da *marginalização* sobre Y

$$\left\{ p\left(x\right) = \sum_{y \in \Omega_Y} p(x, y) \middle| x \in \Omega_X \right\}. \tag{11}$$

De forma análoga, obtém-se a distribuição marginal de Y.

Independência

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias assumindo valores em Ω_X e Ω_Y, respectivamente. Então dizemos que X e Y são *independentes* se

$$p(x, y) = p(x)p(y), \forall\, x \in \Omega_X, \forall\, y \in \Omega_Y. \tag{12}$$

Valor esperado

Seja X uma variável aleatória discreta assumindo valores em um conjunto Ω_X. O *valor esperado* E de uma função $g : X \to \mathbb{R}$ é

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \sum_{x \in \Omega_X} g\left(x\right) p\left(x\right). \tag{13}$$