FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 1 – (02/2019)

1. Uma *probabilidade* é uma função $p : F \to [0,1]$, que designa um número não-negativo para cada evento, satisfazendo os seguintes axiomas (Kolmogorov):

   - $p(A) \geq 0$;
   - $p(\Omega) = 1$;
   - para toda sequência $A_1, \ldots, A_n$ de eventos disjuntos,
   $$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right). \tag{1}$$

   Supondo A e B dois eventos, prove, a partir dos axiomas acima, as seguintes propriedades:

   (a) $p\left(\emptyset\right) = 0$;
   (b) $A \subseteq B \Rightarrow p\left(A\right) \leq p\left(B\right)$;
   (c) $p\left(A\right) \leq 1$;
   (d) $p\left(A^c\right) = 1 - p\left(A\right)$, onde A^c é o evento complementar a A;
   (e) $p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right)$.

2. Considere o *jogo das portas*. Três portas são apresentadas ao jogador, uma das quais guarda um prêmio, e seguem as etapas:

   - na primeira, o jogador escolhe uma das três portas, que não é aberta;
   - na segunda, abre-se uma das duas portas não escolhidas pelo jogador, revelando-se que ela não guarda o prêmio;
   - na terceira, restando duas portas fechadas, pergunta-se ao jogador se ele deseja ou não mudar sua escolha.

   O jogador deve ou não mudar sua escolha? Utilize a regra de Bayes para analisar o problema e justificar sua resposta.

3. Considere 3 moedas viciadas; quando a moeda m é lançada, onde $m \in \{1,2,3\}$, o resultado ‘cara’ ocorre com probabilidade $p(\text{‘cara’}|m) = x_m$.

   (a) Suponha que uma das três moedas é escolhida aleatoriamente, com probabilidades $p(m) = y_m$, e lançada secretamente. Calcule a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido m, para $m \in \{1,2,3\}$, assumindo-se que o resultado observado tenha sido ‘cara’.

(b) Obtenha os valores numéricos da solução do item anterior para $x = [0.2, 0.4, 0.6]$ e $y = [0.5, 0.3, 0.2]$.

4. Considere duas variáveis aleatórias, A e B, que podem assumir valores no conjunto $\{0, 1\}$. A distribuição de probabilidades conjunta de A e B é

$$p(a, b) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } a = b, \\ 0, & \text{se } a \neq b. \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Verifique que A e B não são independentes.

   (b) Suponha que A e B representam duas moedas, e os resultados 0 e 1 representam 'cara' e 'coroa', respectivamente. O comportamento das moedas parece natural? Proponha um mecanismo ou modelo para explicar este comportamento.

5. Considere, agora, que há quatro moedas, dividas em dois conjuntos de duas moedas. Em cada rodada, é escolhida uma moeda x do primeiro conjunto $\Omega_X = \{0, 1\}$, e uma moeda y do segundo conjunto $\Omega_Y = \{0, 1\}$, e elas são lançadas conjuntamente. O resultado da moeda x é $a \in \Omega_A = \{0, 1\}$ e o resultado da moeda y é $b \in \Omega_B = \{0, 1\}$, mais uma vez assumindo que e os resultados 0 e 1 representam 'cara' e 'coroa', respectivamente. O comportamento conjunto de cada par (x, y) é dado por uma distribuição de probabilidades $\{p(a, b|x, y)\}$, dadas por

$$p(a, b|x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } a \oplus b = x.y, \\ 0, & \text{senão;} \end{cases} \tag{3}$$

   o símbolo $\oplus$ representa adição módulo 2.

   (a) Reescreva todas as probabilidades acima na forma de uma tabela 4×4, onde cada coluna representa um par (x, y), e, cada linha, um par (a, b).

   (b) Verifique se existe(m) par(es) de moedas independentes.

   (c) Assim como no problema anterior, proponha um mecanismo ou modelo para explicar os comportamentos dos pares de moedas.