FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 2 – (02/2019)

1. Prove que a intersecção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo.

2. Qual é a distância entre dois hiperplanos paralelos $\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| a^T x = b_1\right\}$ e $\left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| a^T x = b_2\right\}$?

3. Quais dos seguintes conjuntos S são politopos? Justifique, e, se possível, expresse S na forma $S = \{x | Ax \preceq b, Cx = d\}$.

   (a) $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 | -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, onde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x \succeq 0, \mathbf{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$, onde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

   (c) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, x^T y \leq 1, \text{para todo } y \text{ com } \|y\|_2 = 1\right\}$.

   (d) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, x^T y \leq 1, \text{para todo } y \text{ com } \|y\|_1 = 1\right\}$.

4. Faça uma descrição explícita do cone positivo semi-definido S_+^2, em termos dos coeficientes da matrix e desigualdades. Para descrever um elemento geral de S_+^2, use a notação

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

5. Suponha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, e $a, b \in \mathrm{dom}(f)$ com $a < b$.

   (a) Mostre que

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \tag{2}$$

   para todo $x \in [a, b]$.

   (b) Mostre que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \tag{3}$$

   para todo $x \in (a, b)$. Faça um desenho que ilustre esta desigualdade.

6. Considere o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{minimize } & f_0(x_1, x_2) \\ \text{sujeito a } & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Faça um esboço do conjunto factível. Para cada uma das seguintes funções objetivo, encontre o conjunto ótimo e o valor ótimo, sem, ainda, se utilizar de nenhum recurso numérico.

(a) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(b) $f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$.

(c) $f_0(x_1, x_2) = x_1$.

(d) $f_0(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

(e) $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2$.

7. Resolva o problema acima numericamente, e confirme suas respostas. Escreva um código em `MATLAB` usando o `CVX`, ou em `PYTHON` usando o `CVXPY`, e me mande por email.

8. Resolva numericamente o seguinte SDP:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & \operatorname{Tr}(AX) \\
\text{sujeito a } & \operatorname{Tr}(BX) = 1 \\
& \operatorname{Tr}(X) = 1 \\
& X \succeq 0,
\end{aligned}
$$

onde

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}
$$

9. Encontre o Lagrangiano e a função dual de Lagrange do programa linear

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & c^T x \\
\text{sujeito a } & Ax = b \\
& x \succeq 0.
\end{aligned}
$$