Fundamentos de teoria quântica

Aula 5: Emaranhamento

Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

Sistemas compostos

O espaço de Hilbert de um sistema AB, composto por dois subsistemas A e B, é o *produto tensorial* dos espaços de Hilbert dos subsistemas:

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \tag{1}$$

Dimensão

Se $\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^{d_A}$ e $\mathcal{H}_B = \mathbb{C}^{d_B}$, então $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^{d_A d_B}$.

Se $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_A$ e $\{|\phi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^{d_B}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_B$, então $\{|\psi_i\rangle \otimes |\phi_\alpha\rangle\}_{i=1,\alpha=1}^{d_A,d_B}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Produto de Kronecker

Em espaços de Hilbert de dimensão finita, o produto tensorial é equivalente ao produto de Kronecker; *e. g.*:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Operadores sobre espaços de Hilbert compostos

Sejam $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ e $\{|\phi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^{d_B}$ bases ortonormais de $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$, respectivamente. Um operador O atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ pode ser escrito como

$$O = \sum_{ij\alpha\beta} O_{ij\alpha\beta} \, |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta| \, . \tag{3}$$

Traço parcial

- Traço parcial sobre A:

$$\mathrm{Tr}_A\left(O\right) = \sum_{ij\alpha\beta} O_{ij\alpha\beta} \left(\sum_k \langle\psi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle \right) \otimes |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta| \tag{4}$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \left(\sum_i O_{ii\alpha\beta} \right) |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta| \,. \tag{5}$$

- Traço parcial sobre B:

$$\mathrm{Tr}_B\left(O\right) = \sum_{ij\alpha\beta} O_{ij\alpha\beta} \, |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \otimes \left(\sum_\gamma \langle\phi_\gamma|\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\beta|\phi_\gamma\rangle \right) \tag{6}$$

$$= \sum_{ij} \left(\sum_\alpha O_{ij\alpha\alpha} \right) |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \,. \tag{7}$$

Transposição parcial

- Transposição parcial sobre A:

$$O^{T_A} = \sum_{ij\alpha\beta} O_{ij\alpha\beta} \left|\psi_j\right\rangle\!\left\langle\psi_i\right| \otimes \left|\phi_\alpha\right\rangle\!\left\langle\phi_\beta\right| . \tag{8}$$

- Transposição parcial sobre B:

$$O^{T_B} = \sum_{ij\alpha\beta} O_{ij\alpha\beta} \left|\psi_i\right\rangle\!\left\langle\psi_j\right| \otimes \left|\phi_\beta\right\rangle\!\left\langle\phi_\alpha\right| . \tag{9}$$

Estados reduzidos

Seja ρ um operador densidade atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, representando o estado de um sistema quântico bipartido.

O *estado reduzido* ρ_A do subsistema A é dado por

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(\rho\right); \tag{10}$$

e o *estado reduzido* ρ_B do subsistema B é dado por

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A\left(\rho\right). \tag{11}$$

Medições locais em A

Considere um POVM x representado pelos efeitos $\left\{E_{a|x}\right\}$, atuando sobre $\mathcal{H}_A$, realizado sobre o subsistema A de um sistema composto AB, no estado ρ_{AB}, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Cada efeito local $E_{a|x}$ induz um efeito global $E_{a|x} \otimes \mathbb{1}$, onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade em $\mathcal{H}_B$, de forma as probabilidades dos possíveis resultados possam ser escritas como

$$p\left(a|x\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\left(E_{a|x} \otimes \mathbb{1}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_A E_{a|x}\right), \tag{12}$$

onde ρ_A é o estado reduzido da parte A.

Medições locais em B

De forma análoga, seja um POVM y representado pelos efeitos $\left\{F_{b|y}\right\}$, atuando sobre $\mathcal{H}_B$, realizado sobre o subsistema B de um sistema composto AB, no estado ρ_{AB}, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Cada efeito local $F_{b|y}$ induz um efeito global $\mathbb{1} \otimes F_{b|y}$, onde $\mathbb{1}$ é o operador identidade em $\mathcal{H}_A$, de forma as probabilidades dos possíveis resultados possam ser escritas como

$$p\left(b|y\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\left(\mathbb{1} \otimes F_{b|y}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_B F_{b|y}\right), \tag{13}$$

onde ρ_B é o estado reduzido da parte A.

Medições locais conjuntas

Agora, considere um POVM x representado pelos efeitos $\left\{E_{a|x}\right\}$, e um POVM y representado pelos efeitos $\left\{F_{b|y}\right\}$, realizados sobre os subsistemas A e B, respectivamente, de um sistema composto AB, no estado ρ_{AB}, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. As probabilidades conjuntas dos possíveis pares de resultados são dadas por

$$p\left(a, b|x, y\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB}\left(E_{a|x} \otimes F_{b|y}\right)\right). \tag{14}$$

Operações

Uma *operação* sobre um sistema é representada por uma mapa linear M que leva cada estado ρ a um novo estado $M\left[\rho\right]$.

A fim de preservar as propriedades do operador densidade, M deve ser um *mapa completamente positivo* e preservar o traço.

Mapas com estas propriedades são muitas vezes chamados de *superoperadores*.

Mapas positivos

Um *mapa positivo* é um mapa linear que mapeia operadores positivos em operadores positivos, ou seja, se $\rho \geq 0$, então $M[\rho] \geq 0$.

Operações locais

Todo mapa linear $M : \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ induz, para todo k, um mapa linear

$$M \otimes \mathbb{1}_k : \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k} \to \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k}, \tag{15}$$

que, além de atuar como M sobre $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$, atua trivialmente no espaço $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_k}$, o espaço de operadores lineares atuando sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão k.

Mapas completamente positivos

Seja $M : \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ um mapa positivo.

- Se $M \otimes \mathbb{1}_k : \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k} \to \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k}$ é positivo, M é dito *mapa k-positivo*.
- Se $M \otimes \mathbb{1}_k : \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k} \to \mathcal{L}_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{L}_{\mathcal{H}_k}$ é positivo para todo k, M é dito *mapa completamente positivo*.

Teorema de Kraus

A ação de todo mapa completamente positivo M pode ser escrita como

$$M\left[\rho\right] = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger \tag{16}$$

para algum conjunto de operadores $\{K_i\}$ satisfazendo $\sum_i K_i^\dagger K_i \leq \mathbb{1}$. Tais operadores são ditos *operadores de Kraus*.

Emaranhamento em estados puros

Um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é dito *produto* se existem $|\phi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\varphi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ tais que

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\varphi_B\rangle \,. \tag{17}$$

Um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é dito *emaranhado* se não é produto.

Decomposição de Schmidt

Um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} a_{ij} |i_A j_B\rangle . \tag{18}$$

Teorema [Decomposição de Schmidt]: Para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, existem bases $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d_A}$ de $\mathcal{H}_A$ e $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^{d_B}$ de $\mathcal{H}_B$ tais que

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i |\psi_i \phi_i\rangle , \tag{19}$$

onde $d = \min\{d_A, d_B\}$ e $c_i \geq 0$, para todo i.

Posto de Schmidt

O *posto*, ou *rank*, de Schmidt é o número de coeficientes de Schmidt estritamente maiores que zero.

Um estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é emaranhado se, e somente se, seu posto de Schmidt é maior que 1.

Pureza local

Seja um estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O estado ρ é produto se, e somente se, os estados reduzidos ρ_A ou ρ_B são puros.

Purificação e a igreja do espaço de Hilbert maior

Para todo estado ρ_A atuando sobre $\mathcal{H}_A$, existe um estado puro $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tal que $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right)$.

Estados de Bell

Seja $\mathcal{H}_{\mathcal{AB}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Os *estados de Bell*

$$\left|\phi^{\pm}\right\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{20}$$

$$\left|\psi^{\pm}\right\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{21}$$

constituem uma base ortonormal de $\mathcal{H}_{AB}$ onde todos os elementos são emaranhados.

Estados produto

Um estado ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é *produto* se existem estados ρ^A atuando em $\mathcal{H}_A$ e ρ^B atuando em $\mathcal{H}_B$ tais que

$$\rho = \rho^A \otimes \rho^B. \tag{22}$$

Estados separáveis

Um estado ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é *separável* se pode ser escrito como combinação convexa de estados produto

$$\rho = \sum_i p_i \left(\rho_i^A \otimes \rho_i^B\right), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1, \tag{23}$$

onde ρ_i^A são estados atuando em $\mathcal{H}_A$ e ρ_i^B são estados atuando em $\mathcal{H}_B$, para todo i.

O conjunto $\mathcal{S}$ dos estados separáveis é convexo, por construção.

Estados emaranhados

Um estado ρ atuando em $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é *emaranhado* se não é separável.

Critério de Peres

Seja ρ o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Se $\rho^{T_A} \ngeq 0$ ou $\rho^{T_B} \ngeq 0$, então ρ é emaranhado.

Se $\dim(\mathcal{H}_{AB}) \leq 6$, o critério de Peres é *necessário e suficiente* para certificar emaranhamento.

Estados NPT e PPT

Se $\rho^{T_A} \ngeq 0$ ou $\rho^{T_B} \ngeq 0$, então ρ é um estado com *transposta parcial negativa (NPT)*.

Se $\rho^{T_A} \geq 0$ e $\rho^{T_B} \geq 0$, então ρ é um estado com *transposta parcial positiva (PPT)*.

Segundo o critério de Peres, todo estado NPT é emaranhado, mas nem todo estado PPT é separável.

Estados de Werner

Os *estados de Werner* constituem uma família de estados $\rho(w)$, a um parâmetro w, atuando sobre $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, tais que

$$\rho(w) = (U \otimes U^*)\, \rho(w)\, (U \otimes U^*)^\dagger\,, \tag{24}$$

para toda unitária U atuando sobre $\mathbb{C}^d$.

Estados de Werner de dois qubits

Se $\mathcal{H}_{AB} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, os estados de Werner podem ser escritos como

$$\rho(w) = w \left|\psi^-\middle\rangle\!\middle\langle\psi^-\right| + (1-w)\,\frac{\mathbb{1}}{4}, \tag{25}$$

onde $w \in [-1/3, 1]$ e $|\psi^-\rangle$ é um dos estados de Bell, o estado *singleto*.

Os estados de Werner de dois qubits são emaranhados se, e somente se, $w > 1/3$.

Critério de Peres-Horodecki

Seja ρ o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O estado ρ é emaranhado se, e somente se, existe um mapa positivo mas não completamente positivo M tal que $(M \otimes \mathbb{1}_k)[\rho] \ngeq 0$, para algum k.

Extensões simétricas

Seja ρ_{AB} o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Diz-se que ρ_{AB} admite uma *extensão k-simétrica* se existe um estado $\rho_{AB_1 \dots B_k}$ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes k}$ tal que o traço parcial sobre *quaisquer* $(k-1)$ cópias do subsistema B é igual a ρ_{AB}:

$$\mathrm{Tr}_{B_{(1\dots k)/i}}(\rho_{AB_1 \dots B_k}) = \rho_{AB_i} = \rho_{AB_i}; \tag{26}$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, onde a notação $B_{(1\dots k)/i}$ denota todas as k partes B, exceto a parte B_i.

Extensões simétricas PPT

Seja ρ_{AB} o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Diz-se que ρ_{AB} admite uma *extensão k-simétrica PPT* se existe um estado $\rho_{AB_1\ldots B_k}$ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes k}$ de forma que $\rho_{AB_1\ldots B_k}^{T_A} \geq 0$, $\rho_{AB_1\ldots B_k}^{T_{B_1}} \geq 0$, e o traço parcial sobre *quaisquer* $(k-1)$ cópias do subsistema B é igual a ρ_{AB}:

$$\mathrm{Tr}_{B_{(1\ldots k)/i}}(\rho_{AB_1\ldots B_k}) = \rho_{AB_i} = \rho_{AB_i}; \tag{27}$$

para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, onde a notação $B_{(1\ldots k)/i}$ denota todas as k partes B, exceto a parte B_i.

Critério de Doherty-Parrilo-Spedalieri (DPS)

Seja ρ_{AB} o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O estado ρ_{AB} é separável se, e somente se, admite uma extensão k-simétrica, ou uma extensão k-simétrica PPT, para todo k.

Hierarquia DPS: implementação via SDP

$$
\begin{aligned}
\text{dados} \quad & \rho_{AB}, k && (28)\\
\text{encontre} \quad & \rho_{AB_1 \dots B_k} && (29)\\
\text{sujeito a} \quad & \mathrm{Tr}_{B_{(1\dots k)/i}}\left(\rho_{AB_1 \dots B_k}\right) = \rho_{AB}, \quad i = 1, \dots, k && (30)\\
& \rho_{AB_1 \dots B_k} \succeq 0 && (31)\\
& \rho_{AB_1 \dots B_k}^{T_A} \succeq 0 && (32)\\
& \rho_{AB_1 \dots B_k}^{T_{B_1}} \succeq 0. && (33)
\end{aligned}
$$

Testemunhas de emaranhamento

Seja ρ_{AB} o estado de um sistema quântico bipartido, atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. O estado ρ_{AB} é emaranhado se, e somente se, existe um operador hermitiano W, dito *testemunha de emaranhamento*, tal que $\mathrm{Tr}\left(\rho W\right) < 0$ e $\mathrm{Tr}\left(\sigma W\right) \geq 0$ para todo σ separável, $\sigma \in \mathcal{S}$.

Operações locais com comunicação clássica (LOCC)

A classe de *operações locais com comunicação clássica (LOCC)* representa todas as possíveis intervenções que podem ser realizadas de forma correlacionada sobre cada um dos subsistemas de um sistema quântico composto.

Por meio destas operações, é possível preparar qualquer estado separável, mas não é possível preparar nenhum estado emaranhado.

Exemplos de LOCC

1. Operações unitárias locais correlacionadas:

$$\rho \mapsto \sum_i (U_i \otimes V_i)\, \rho\, (U_i \otimes V_i)^\dagger\,, \tag{34}$$

   onde U_i e V_i são respectivas unitárias sobre $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$.

2. Adição de um sistema auxiliar:

$$\rho \mapsto \rho \otimes \sigma, \tag{35}$$

   onde σ é o estado do sistema adicional.

3. Descarte de uma parte do sistema

$$\rho \mapsto \mathrm{Tr}_A\,(\rho)\,. \tag{36}$$

Quantificadores de emaranhamento

Um *quantificador* ou *monótono* de emaranhamento é uma função $E : \mathcal{D}_{\mathcal{H}}^{+} \to \mathbb{R}$ que, para cada estado ρ, atribui um número real não-negativo correspondente a alguma quantidade de emaranhamento.

Propriedades de quantificadores de emaranhamento

Todo quantificador de emaranhamento deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. Se ρ é separável, então $E(\rho) = 0$.
2. O estado puro $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i, i\rangle$ é o *estado maximamente emaranhado de dimensão* d, e possui emaranhamento

$$E(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \log d. \tag{37}$$

3. Se M é um mapa que pode ser implementado por LOCC, então

$$E(M\rho) \leq E(\rho). \tag{38}$$

Entropia de von Neumann

A *entropia de von Neumann* é uma função $S : \mathcal{D}^{+}_{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$, que, para cada estado ρ, atribui um número não-negativo através da definição:

$$S\left(\rho\right) = -\rho \log \rho = -\sum_{i} p_i \log p_i, \tag{39}$$

onde $\{p_i\}$ é o conjunto de autovalores de ρ.

Entropia de emaranhamento

Seja $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ um estado puro atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. A *entropia de emaranhamento* de ρ, denotada $E_{EE}(\rho)$, é definida como

$$E_{EE}(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B), \tag{40}$$

onde S é a entropia de von Neumann e ρ_A e ρ_B são os estados reduzidos de ρ.

Ensembles de estados puros

Um dado ρ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ pode ser decomposto como combinação convexa de estados puros

$$\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle\!\left\langle\psi_i\right|, \; p_i \geq 0, \; \sum_i p_i = 1. \tag{41}$$

Em geral, são infinitas as decomposições da forma acima para um dado ρ.

Emaranhamento de formação

O *emaranhamento de formação* de um estado ρ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denotado $E_F(\rho)$ e definido como

$$E_F(\rho) = \inf_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|), \tag{42}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ tais que $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

O *custo de emaranhamento* de um estado ρ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denotado $E_C(\rho)$ e é definido como a menor razão entre m e n, onde m é o número de cópias de um estado maximamente emaranhado que são necessárias para a obtenção de n cópias de ρ através de um mapa M que representa um LOCC, no limite assintótico. Mais precisamente,

$$E_C(\rho) = \inf_{M \in LOCC} \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}, \tag{43}$$

onde $M\left[(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^{\otimes m}\right] = \rho^{\otimes n}$.

Emaranhamento destilável

O *emaranhamento destilável* de um estado ρ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denotado $E_D(\rho)$ e é definido como a maior razão entre m e n, onde m é o número de cópias de um estado maximamente emaranhado que podem ser obtidas a partir de n cópias de ρ através de um mapa M que representa um LOCC, no limite assintótico. Mais precisamente,

$$E_D(\rho) = \sup_{M \in LOCC} \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}, \tag{44}$$

onde $M\left[\rho^{\otimes n}\right] = \left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right)^{\otimes m}$.

Negatividade

A *negatividade* de um estado ρ atuando sobre $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denotada $\mathcal{N}(\rho)$ e é definida como a soma dos valores absolutos dos autovalores negativos da transposta parcial de ρ. Equivalentemente,

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\left\|\rho^{T_A}\right\| - 1}{2}, \tag{45}$$

onde $\|X\|_1 = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{X^\dagger X}\right)$.

Concorrência

A *concorrência* de um estado ρ atuando sobre $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ é denotada $\mathcal{C}(\rho)$ e é definida como

$$\mathcal{C}(\rho) = \max\left(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\right), \tag{46}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ são os autovalores, em ordem descrescente, da matriz

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}, \tag{47}$$

onde, por sua vez,

$$\tilde{\rho} = \left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right) \rho \left(\sigma_y \otimes \sigma_y\right). \tag{48}$$