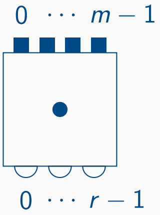
Fundamentos de teoria quântica

Aula 7: Localidade de Bell

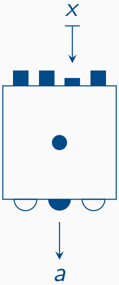
Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

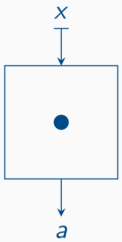
Caixa de medição



Caixa de medição



Caixa de medição



Comportamentos

O *comportamento* $\mathbf{p}$ de uma caixa de medição é definido como o conjunto das distribuições de probabilidades dos possíveis resultados, condicionadas a cada uma das possíveis medições:

$$\mathbf{p} = \left\{ p\left(a|x\right) | a \in \left\{0, \ldots, r-1\right\}, x \in \left\{0, \ldots, m-1\right\} \right\}.$$

Com a ordenação dos elementos de um comportamento $\mathbf{p}$, é possível associá-lo a um vetor $\mathbf{p} = \left[p\left(a|x\right)\right] \in \mathbb{R}^d$, onde $d = rm$.

Conjunto dos comportamentos

O conjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, onde $d = rm$, de possíveis comportamentos da caixa, é

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{p} = [p\,(a|x)] \in \mathbb{R}^d \middle| p\,(a|x) \geq 0, \sum_a p\,(a|x) = 1, \forall\, x \right\}.$$

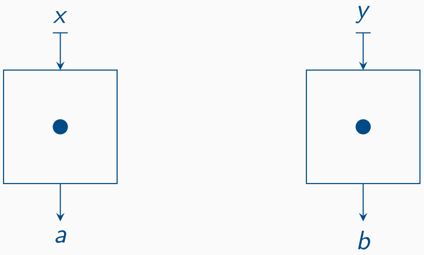
Por definição, $\mathcal{P}$ é um politopo, e sua dimensão é $\dim(\mathcal{P}) = (r-1)\,m$.

Cenários de Bell

Um *cenário de Bell* é um experimento em que n partes operam suas respectivas caixas de medição, cada uma capaz de realizar m medições, tendo cada medição r possíveis respostas. A tripla (n, m, r) caracteriza o cenário.

Suponha um cenário de Bell bipartido $(\mathrm{n} = 2)$, e sejam as partes denominadas Alice e Bob. Seja x a medição realizada por Alice, com resultado a, e seja y a medição realizada por Bob, com resultado b.

Cenário de Bell



Cenário de Bell

O comportamento conjunto das caixas de medição é um vetor $\mathbf{p} = \left[p\left(a, b|x, y\right)\right] \in \mathbb{R}^d$, onde $d = \left(r^2 - 1\right) m^2$.

Descrições marginais

O comportamento da caixa de medição de Alice é dado pela distribuição marginal de seus resultados:

$$\mathbf{p}_A = \left\{ p\left(a|x,y\right) \middle| p\left(a|x,y\right) = \sum_b p\left(a,b|x,y\right) \right\}.$$

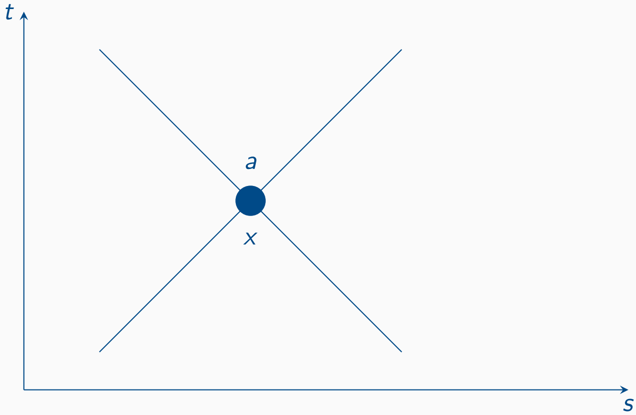
Analogamente, o comportamento da caixa de Bob é dado por

$$\mathbf{p}_B = \left\{ p\left(b|x,y\right) \middle| p\left(b|x,y\right) = \sum_a p\left(a,b|x,y\right) \right\}.$$

Eventos de medição

Um *evento de medição* é uma região no espaço-tempo onde a caixa de medição tem seu funcionamento integral. Um evento de medição $a|x$ tem início na escolha de medição x e fim no registro do resultado a.

Evento de medição

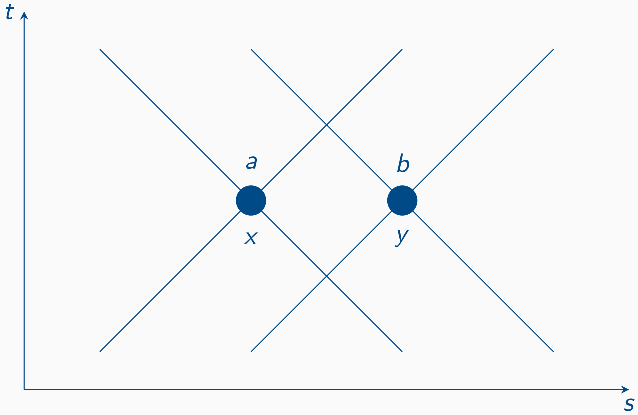


Separação tipo-espaço

Dois eventos de medição $a|x$ e $b|y$ são *separados tipo-espaço* se, para todo referencial inercial, $a|x$ está fora dos cones de luz de $b|y$, e *vice-versa*.

Em particular, existe um referencial inercial onde $a|x$ e $b|y$ são *simultâneos*.

Separação tipo-espaço



Não-sinalização

Caso os experimentos sejam realizados de forma que os eventos de medição sejam espacialmente separados, são justificadas as *condições de não-sinalização*: o comportamento marginal de cada uma das caixas não depende das escolhas de medições das demais:

$$\mathbf{p}_A = \left\{ p\left(a|x\right) \right\};$$
$$\mathbf{p}_B = \left\{ p\left(b|y\right) \right\}.$$

Conjunto dos comportamentos não-sinalizantes

O conjunto $\mathcal{P}_{NS} \subset \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, onde $d = (rm)^2$, de possíveis comportamentos não-sinalizantes da caixa, é

$$\mathcal{P}_{NS} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| \sum_b p(a, b|x, y) = \sum_b p(a, b|x, y'), \forall\, y \neq y', \right.$$
$$\left. \sum_a p(a, b|x, y) = \sum_a p(a, b|x', y), \forall\, x \neq x' \right\}. \quad (1)$$

Por definição, $\mathcal{P}_{NS}$ é um politopo; sua dimensão é $\dim(\mathcal{P}_{NS}) = \left[\left(r^2 - 1\right) m^2\right] - 2m(m-1)(r-1)$.

Correlações

Em geral, as condições de não-sinalização não são suficientes para que os eventos de medição em cada uma das caixas sejam independentes; ou seja, em geral

$$p\left(a, b|x, y\right) \neq p\left(a|x\right) p\left(b|y\right).$$

Neste caso, as caixas são ditas *correlacionadas*.

Princípio de Reichenbach

Se dois eventos são correlacionados, então:

- ou existe uma conexão causal direta entre os eventos;
- ou existe um terceiro evento, desconhecido, que é causa comum dos dois primeiros.

Causalidade local

Se dois eventos de medição são espacialmente separados, não há conexão causal direta entre eles, e, portanto, quaisquer correlações observadas advém da influência causal de um terceiro evento desconhecido no passado comum dos dois primeiros.

Causalidade local

Seja Λ uma variável aleatória que assume valores no conjunto $L = \{\lambda\}$, com probabilidades $\{p(\lambda)\}$. Uma medição de Λ é realizada no passado comum dos eventos de medição espacialmente separados $a|x$ e $b|y$, e o valor λ obtido influencia o funcionamento de ambas as caixas de medição. Desta forma:

$$p(a, b|x, y, \lambda) = p(a|x, \lambda)\, p(b|y, \lambda)\,.$$

Correlações locais

As correlações observadas advém da marginalização sobre λ:

$$\begin{aligned} p\left(a, b|x, y\right) &= \int_L p\left(a, b, \lambda|x, y\right) d\lambda \\ &= \int_L p\left(a, b|x, y, \lambda\right) p\left(\lambda|x, y\right) d\lambda \\ &= \int_L p\left(a|x, \lambda\right) p\left(b|y, \lambda\right) p\left(\lambda\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Um comportamento $\mathbf{p}$ cujos elementos admitem uma decomposição como acima é dito *comportamento local*.

Conjunto dos comportamentos não-sinalizantes

O conjunto $\mathcal{P}_L \subset \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, onde $d = (rm)^2$, de possíveis comportamentos locais da caixa, é

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| p\left(a, b|x, y\right) = \int_L p\left(a|x, \lambda\right) p\left(b|y, \lambda\right) p\left(\lambda\right) d\lambda. \right\}$$

O conjunto $\mathcal{P}_L$ é um politopo; sua dimensão é $\dim\left(\mathcal{P}_L\right) = \left(r^2 - 1\right) m^2 - 2m\left(m-1\right)\left(r-1\right)$.

O politopo $\mathcal{P}_L$

Sejam Λ_A e Λ_B variáveis aleatórias que, para cada par de medições (x, y), determinam, respectivamente, seus resultados:

$$p\left(a|x, \lambda_A\right) = \delta_{a,a'(x,\lambda_A)}; \quad p\left(b|y, \lambda_B\right) = \delta_{b,b'(y,\lambda_B)}.$$

Assim:

$$p\left(a|x, \lambda\right) = \int p\left(a|x, \lambda_A\right) p\left(\lambda_A|\lambda\right) d\lambda_A$$
$$p\left(b|y, \lambda\right) = \int p\left(b|y, \lambda_B\right) p\left(\lambda_B|\lambda\right) d\lambda_B.$$

O politopo $\mathcal{P}_L$

$$\begin{aligned}
p\left(a,b|x,y\right) &= \int p\left(a|x,\lambda\right)p\left(b|y,\lambda\right)p\left(\lambda\right)d\lambda \\
&= \int \left(\int p\left(a|x,\lambda_A\right)p\left(\lambda_A|\lambda\right)d\lambda_A\right)\times \\
&\qquad \left(\int p\left(b|y,\lambda_B\right)p\left(\lambda_B|\lambda\right)d\lambda_B\right)p\left(\lambda\right)d\lambda \\
&= \int\int p\left(a|x,\lambda_A\right)p\left(b|y,\lambda_B\right)\times \\
&\qquad \left(\int p\left(\lambda_A|\lambda\right)p\left(\lambda_B|\lambda\right)p\left(\lambda\right)d\lambda\right)d\lambda_A d\lambda_B \\
&= \int\int p\left(a|x,\lambda_A\right)p\left(b|y,\lambda_B\right)p\left(\lambda_A,\lambda_B\right)d\lambda_A d\lambda_B.
\end{aligned}$$

O politopo $\mathcal{P}_L$

Como

$$p\left(a|x,\lambda_A\right)=\delta_{a,a'(x,\lambda_A)};\quad p\left(b|y,\lambda_B\right)=\delta_{b,b'(y,\lambda_B)},$$

λ_A pode ser mapeado a uma lista dos resultados de todas as possíveis medições, assim como λ_B:

$$\begin{aligned}\lambda_A &\rightarrow \left[a'_0,\ldots,a'_x,\ldots,a'_m\right],\\ \lambda_B &\rightarrow \left[b'_0,\ldots,b'_y,\ldots,b'_m\right].\end{aligned}$$

Portanto, é suficiente que $|\{\lambda_A\}|=|\{\lambda_B\}|=r^m$.

O politopo $\mathcal{P}_L$

Então:

$$p\left(a,b|x,y\right)=\int\int p\left(a|x,\lambda_A\right)p\left(b|y,\lambda_B\right)p\left(\lambda_A,\lambda_B\right)d\lambda_A d\lambda_B$$
$$=\sum_{i=1}^{r^m}\sum_{j=1}^{r^m}p\left(a|x,\lambda_A\left(i\right)\right)p\left(b|y,\lambda_B\left(j\right)\right)p\left(\lambda_A\left(i\right),\lambda_B\left(j\right)\right)$$

Mapeando $(\lambda_A(i),\lambda_B(j))\rightarrow(i,j)$, e definindo $\lambda=(i,j)$:

$$p\left(a,b|x,y\right)=\sum_{\lambda=1}^{r^{2m}}p\left(a|x,\lambda\right)p\left(b|y,\lambda\right)p\left(\lambda\right)$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{r^{2m}}\delta_{a,a'(x,\lambda)}\delta_{b,b'(y,\lambda)}p\left(\lambda\right)$$

Comportamentos determinísticos locais

O conjunto $\mathcal{P}_D \subset \mathcal{P}$ dos *comportamentos determinísticos locais* é definido como

$$\mathcal{P}_D = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| p\left(a, b|x, y\right) = \delta_{a,a'(x,\lambda)}\delta_{b,b'(y,\lambda)}, \forall\, a'(x,\lambda), b'(y,\lambda) \right\}.$$

O conjunto $\mathcal{P}_D$ é discreto e contém r^{2m} elementos.

Comportamentos locais

Finalmente, um comportamento $\mathbf{p}$ é local se, e somente se,

$$\mathbf{p} = \sum_{\lambda=1}^{r^{2m}} p\left(\lambda\right) \mathbf{p}_D\left(\lambda\right),$$

onde $\mathbf{p}_D\left(\lambda\right) \in \mathcal{P}_D$ é um comportamento determinístico local para todo λ.

Politopo local

O conjunto $\mathcal{P}_L \subset \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, onde $d = (rm)^2$, de possíveis comportamentos locais da caixa, é

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| \mathbf{p} = \sum_{\lambda=1}^{r^{2m}} p(\lambda)\, \mathbf{p}_D(\lambda)\,, \mathbf{p}_D(\lambda) \in \mathcal{P}_D \right\}$$

O conjunto $\mathcal{P}_L$ é, por definição, um conjunto convexo com finitos pontos extremais. Consequentemente, $\mathcal{P}_L$ é um politopo, o *politopo local*.

Representações

Todo politopo pode ser representado de duas formas equivalentes:

- como combinação convexa de um número finito de pontos:

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| \mathbf{p} = \sum_{\lambda=1}^{r^{2m}} p\left(\lambda\right) \mathbf{p}_D\left(\lambda\right), \mathbf{p}_D\left(\lambda\right) \in \mathcal{P}_D \right\};$$

- como intersecção de um número finito de subespaços:

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| c_i^T \mathbf{p} \leq d_i, i = 1, \ldots, k \right\},$$

onde $c_i \in \mathbb{R}^d$ e $d_i \in \mathbb{R}$ para todo i.

Faces, vértices e facetas

Uma *face* de um politopo $\mathcal{P}$ é uma superfície que faz parte da sua fronteira.

Faces podem ter dimensão $d' \in \{0, \ldots, \dim(P) - 1\}$; faces de dimensão $d' = 0$ são ditas *vértices*, e faces de dimensão $d' = \dim(P) - 1$ são ditas *facetas*.

Desigualdades de Bell

Seja $\mathcal{P}_L$ um politopo local em sua representação de subespaços:

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P} \middle| c_i^T \mathbf{p} \leq d_i, i = 1, \ldots, k \right\}.$$

As desigualdades

$$c_i^T \mathbf{p} \leq d_i$$

associadas às facetas de $\mathcal{P}_L$ são ditas *desigualdades de Bell*.

Desigualdades de Bell

Por definição, desigualdades de Bell são desigualdades lineares em $\mathbf{p}$, satisfeitas por todo $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_L$.

Desigualdade CHSH

No cenário $(n, m, r) = (2, 2, 2)$, a única desigualdade de Bell* é a *desigualdade CHSH* (Clauser-Horne-Shimony-Holt):

$$\begin{aligned} &p(0,0|0,0) - p(1,0|0,0) - p(0,1|0,0) + p(1,1|0,0) \\ &+ p(0,0|1,0) - p(1,0|1,0) - p(0,1|1,0) + p(1,1|1,0) \\ &+ p(0,0|0,1) - p(1,0|0,1) - p(0,1|0,1) + p(1,1|0,1) \\ &- p(0,0|1,1) + p(1,0|1,1) + p(0,1|1,1) - p(1,1|1,1) \leq 2. \end{aligned}$$

Desigualdade CHSH em correlatores

Definindo o *correlator* $E(x, y)$ do par de medições (x, y) como:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= p(0, 0|x, y) - p(1, 0|x, y) - p(0, 1|x, y) + p(1, 1|x, y) \\ &= p(a = b|x, y) - p(a \neq b|x, y); \end{aligned}$$

podemos reescrever a desigualdade CHSH como

$$E(0, 0) + E(1, 0) + E(0, 1) - E(1, 1) \leq 2.$$

O cenário $(2,2,2)$

- O politopo de comportamentos $\mathcal{P}$ tem dimensão $\dim(\mathcal{P}) = 12$, e está mergulhado em $\mathbb{R}^{16}$.
- O politopo de não-sinalização $\mathcal{P}_{NS}$, assim como o politopo local $\mathcal{P}_L$, tem dimensão $\dim(\mathcal{P}_{NS}) = \dim(\mathcal{P}_L) = 8$.
- O politopo local tem 16 pontos extremais.

O cenário $(2, 2, 2)$

O politopo local $\mathcal{P}_L$ tem 24 facetas, das quais

- 16 são triviais, da forma

$$p\left(a, b|x, y\right) \geq 0;$$

- 8 são desigualdades de Bell, da forma

$$\begin{aligned}
2 &\leq + E\left(0,0\right) + E\left(1,0\right) + E\left(0,1\right) - E\left(1,1\right) \leq 2 \\
2 &\leq + E\left(0,0\right) + E\left(1,0\right) - E\left(0,1\right) + E\left(1,1\right) \leq 2 \\
2 &\leq + E\left(0,0\right) - E\left(1,0\right) + E\left(0,1\right) - E\left(1,1\right) \leq 2 \\
2 &\leq - E\left(0,0\right) + E\left(1,0\right) + E\left(0,1\right) + E\left(1,1\right) \leq 2.
\end{aligned}$$

Teorema de Fine

Seja $(2, m, r)$ um cenário de Bell bipartido. Um comportamento $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ é local se, e somente se, existe uma distribuição de probabilidades conjunta de todos os possíveis resultados de todas as possíveis medições,

$$\{p\left(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m\right)\},$$

onde a_x denota o resultado da medição x e b_y denota o resultado da medição y, tal que cada elemento $p\left(a, b|x, y\right)$ do comportamento pode ser dela recuperado via marginalização:

$$p\left(a, b|x, y\right) = \sum_{[a_i]/a_x} \sum_{[b_j]/b_y} p\left(a_0, \ldots, a_x = a, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_y = b, \ldots, b_m\right).$$

Prova

Se $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_L$, então existem $p(a|x,\lambda)$, $p(b|y,\lambda)$ e $p(\lambda)$ tais que seus elementos são

$$p(a,b|x,y) = \int p(a|x,\lambda)\, p(b|y,\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda.$$

A distribuição cujos elementos são

$$\begin{aligned} p(a_0,\ldots,a_m,b_0,\ldots,b_m) = \int & p(a_0|0,\lambda)\ldots p(a_m|m,\lambda) \times \\ & p(b_0|0,\lambda)\ldots p(b_m|m,\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda \end{aligned}$$

é conjunta para todos os resultados de todas as possíveis medições e recupera os elementos de $\mathbf{p}$ como marginais.

Prova

Suponha que exista $\{p(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m)\}$ tal que

$$p(a, b|x, y) = \sum_{[a_i]/a_x} \sum_{[b_j]/b_y} p(a_0, \ldots, a_x = a, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_y = b, \ldots, b_m).$$

Segue que

$$p(a, b|x, y) = \sum_{[a_i]} \sum_{[b_j]} \delta_{a_x, a} \delta_{b_y, b} p(a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m).$$

O comportamento $\mathbf{p}$ é combinação convexa de comportamentos determinísticos locais e, portanto, $\mathbf{p}$ é local.