FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 3 – (02/2019)

1. a) Confira que as matrizes de Pauli satisfazem as relações de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{1}$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e a notação de soma de Einstein é assumida.

b) Confira que as matrizes de Pauli satisfazem as relações de anti-comutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}, \tag{2}$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker e $\mathbb{1}$ é o operador identidade.

c) Utilize as relações de comutação e anti-comutação para provar que

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{3}$$

2. Sejam $\vec{v}$ um vetor real, unitário, e tridimensional, e θ um número real. Mostre que

$$e^{i\theta\vec{v}.\vec{\sigma}} = \cos(\theta)I + i\sin(\theta)\vec{v}.\vec{\sigma}. \tag{4}$$

3. Sejam A e B dois operadores Hermitianos. Prove que $[A, B] = 0$ se, e somente se, são simultaneamente diagonalizáveis, isto é, existe uma base ortonormal $\{|\phi_i\rangle\}$ do espaço de Hilbert na qual A e B são diagonais,

$$A = \sum_i a_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad B = \sum_i b_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \tag{5}$$

4. Há situações nas quais uma medição não-seletiva – uma medição da qual não se sabe o resultado, e, portanto, o estado do sistema após a medição é uma mistura dos estados pós-medição de cada um dos possíveis resultados (*vide* remixagem) – não altera o estado quântico do sistema. Seja A_x um observável associada a uma medição projetiva x. Prove que a medição não-seletiva de x não altera o estado ρ do sistema se, e somente se, $[A_x, \rho] = 0$.

5. Seja ρ um estado de um qubit parametrizado pelo vetor de Bloch $\vec{v}$, e $\Pi_{0|x}$ o projetor associado ao resultado $a = 0$ de uma medição projetiva x, parametrizado pelo vetor de Bloch $\vec{w}$. Encontre as probabilidades $p(a|x)$ dos possíveis resultados da medição x realizada sobre o estado ρ em função dos vetores de Bloch $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6. Suponha que se tenha um sistema de um qubit cujo estado ρ está indeterminado.

   a) Mostre como determinar ρ através da medição dos observáveis dados pelas matrizes de Pauli.

   b) Cada elemento de um conjunto de m operadores hermitianos $\left\{E_{a|x}\right\}_{a=0}^{m-1}$, atuando em $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, pode ser parametrizado como

   $$E_{a|x} = r_a \mathbb{1} + b_a \vec{v_a}.\vec{\sigma} \tag{6}$$

   onde r_a e b_a são números reais não-negativos e $\vec{v_a}$ são vetores unitários, para todo a. Determine as condições que estes parâmetros devem satisfazer para que o conjunto de operadores seja um POVM.

   c) Mostre que, se $r_a = b_a$, o elemento de POVM $E_{a|x}$ tem posto 1 (um único autovalor diferente de zero).

   d) Considere o POVM de 4 resultados cujos elementos são parametrizados pelos vetores

   $$\vec{v_0} = (0, 0, 1)\,, \tag{7a}$$
   $$\vec{v_1} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \tag{7b}$$
   $$\vec{v_2} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \tag{7c}$$
   $$\vec{v_3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \tag{7d}$$

   e $r_a = b_a = 1/4$. Mostre que este único POVM é suficiente para determinar o estado ρ.