FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 5 – (02/2019)

1. Como $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ é uma base do espaço de operadores hermitianos atuando sobre $\mathbb{C}^2$, um estado arbitrário ρ de um sistema de dois qubits pode ser parametrizado por

$$\rho = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} + \vec{r}.\vec{\sigma}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\vec{s}.\vec{\sigma} + \sum_{i,j=1}^{3} t_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right), \tag{1}$$

onde $|\vec{r}| \leq 1$, $|\vec{s}| \leq 1$.

   a) Confira que $t_{ij} = \mathrm{Tr}\left(\rho\left(\sigma_i\otimes\sigma_j\right)\right)$.

   b) Determine os estados reduzidos de ambas as partes.

2. Considere o estado singleto

$$\left|\psi^-\right\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

e dois observáveis $A = \vec{a}.\vec{\sigma}$ e $B = \vec{b}.\vec{\sigma}$.

   a) Mostre que os autovalores de A são $\pm\left\|\vec{a}\right\|$.

   b) Mostre que

$$\left\langle\psi^-\right| A\otimes B\left|\psi^-\right\rangle = -\vec{a}.\vec{b}. \tag{3}$$

3. Mostre que se um mapa linear M admite uma decomposição de Kraus

$$M\left[\rho\right] = \sum_i K_i\rho K_i^\dagger, \tag{4}$$

para operadores $K_i : \mathcal{H}\to\mathcal{H}$, então é um mapa completamente positivo.

4. Considere um estado puro $|\psi\rangle$ de um sistema bipartido de dimensão local d, escrito em sua base de Schmidt

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} c_i\left|\psi_i\phi_i\right\rangle, \tag{5}$$

onde $c_i \geq 0$, para todo i.

   a) Quais são os estados reduzidos ρ_A e ρ_B?

b) Seja ρ um estado de um sistema de dimensão d. 'Invertendo' o procedimento do item a), encontre uma purificação de ρ em um sistema bipartido de dimensão local d.

5. Utilizando o critério de Peres:

   a) Mostre que os estados de Werner de dois qubits são NPT, e, portanto, emaranhados, para $w > 1/3$.

   b) Encontre o intervalo de w para o qual o estado

$$\rho\,(w) = w \left|\psi^-\middle\rangle\!\middle\langle\psi^-\right| + (1-w)\,|00\rangle\!\langle 00| \tag{6}$$

   é emaranhado. Dica: tanto nos dois itens deste problema quanto no próximo problema, não é necessário diagonalizar uma matriz 4×4 diretamente; é possível fazer a diagonalização de blocos de tamanho 2×2.

6. Calcule a negatividade da seguinte família de estados, em função do parâmetro $w \in [0, 1]$:

$$\rho\,(w) = w \left|\phi^+\middle\rangle\!\middle\langle\phi^+\right| + (1-w)\left|\psi^+\middle\rangle\!\middle\langle\psi^+\right|. \tag{7}$$