FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 6 – (02/2019)

1. Mostre que a capacidade de um canal binário simétrico, definido por

$$p(y|x) = \begin{cases} (1-\alpha), & \text{se } x = y; \\ \alpha, & \text{se } x \neq y; \end{cases} \tag{1}$$

é $C = 1 - h(\alpha)$ bits, onde $\alpha \in [0,1]$ e $h(\alpha) = -\alpha \log(\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$ é a *entropia binária*.

2. Considerando uma operação da máquina de clonagem de Bužec-Hillery:

   (a) Obtenha os estados reduzidos $\rho_A = \rho_B$ e ρ_C, para um estado de entrada arbitrário $|\psi\rangle$.

   (b) Obtenha a fidelidade $F = \langle\psi|\,\rho_A\,|\psi\rangle$.

   (c) Como os vetores de Bloch de $\rho_A = \rho_B$ e ρ_C se relacionam com o vetor de Bloch de $|\psi\rangle$?

3. Suponha que Alice e Bob compartilham um sistema de dois qubits (subsistemas A e B_1) no estado $|\psi\rangle = \cos\theta\,|0_A 0_{B_1}\rangle + \sin\theta\,|1_A 1_{B_1}\rangle$, e que, da mesma forma, Bob e Charlie compartilham um sistema de dois qubits (subsistemas B_2 e C) no estado de Bell $\left|\phi^+_{B_2 C}\right\rangle$. Bob, então, utiliza os qubits emaranhados compartilhados com Charlie para realizar uma teleportação do estado do subsistema B_1. Os estados dos sistemas antes e depois da teleportação estão esquematizados na Fig. 1.

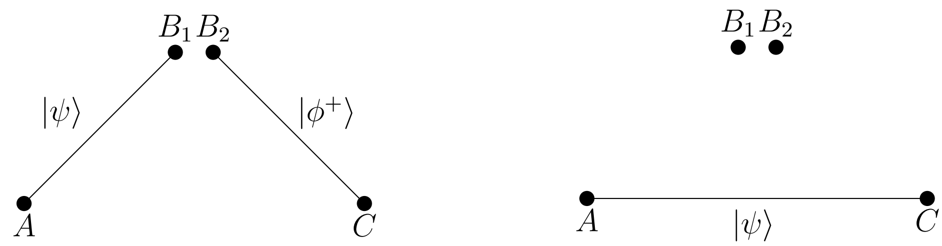

Figura 1: Estados dos sistemas antes e depois da teleportação realizada por Bob.

   a) Mostre que, antes de realizada a teleportação, o estado reduzido dos subsistemas A e C, ρ_{AC}, de Alice e Charlie, é um estado produto.

b) Mostre que, após realizada a teleportação do subsistema 2, o estado dos subsistemas A e C é o mesmo estado $|\psi\rangle$ compartilhado por Alice e Bob inicialmente. Este procedimento ficou conhecido como *swap de emaranhamento*, e pode ser utilizado para emaranhar sistemas sem que seja necessário interagir diretamente sobre eles.

4. Suponha que Alice envia a Bob um qubit em um dos seguintes quatro estados puros, preparados com igual probabilidade:

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \, ; \tag{2}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle + \sqrt{2}\, |1\rangle \right) ; \tag{3}$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle + e^{2\pi i/3} \sqrt{2}\, |1\rangle \right) ; \tag{4}$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|0\rangle + e^{4\pi i/3} \sqrt{2}\, |1\rangle \right) . \tag{5}$$

(a) Qual é a máxima informação acessível a Bob sobre a preparação realizada por Alice? Em outras palavras, encontre uma cota superior para a informação mútua $I\,(A : B)$, onde A é a variável aleatória que rotula as quatro preparações de Alice, e B é a variável aleatória que rotula os resultados de uma medição realizada por Bob sobre o sistema.

(b) Existe algum POVM de Bob que seja capaz de saturar esta cota? Justifique.

(c) Existe um POVM de Bob que é capaz de atingir $I\,(A : B) \approx 0.415$. Tente encontrar este POVM.