FI264/F025 – Fundamentos da teoria quântica
Lista 7 – (02/2019)

1. O politopo de comportamentos não-sinalizantes de um cenário de Bell $(2, m, r)$ tem dimensão $\left(r^2 - 1\right) m^2 - 2m\,(m-1)\,(r-1)$. Justifique.

2. No cenário $(2, 2, 2)$, um comportamento, na representação canônica, é um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{16}$. Porém, tanto o politopo de não-sinalização quanto o politopo local têm dimensão 8, e é possível representar todos os seus elementos no espaço a que, de fato, pertencem, $\mathbb{R}^8$. Há várias formas de se fazer esta mudança de representação; neste problema, consideraremos as duas mais utilizadas.

   - Na *representação de Collins-Gisin*, tomamos um comportamento na representação canônica, desprezamos um resultado de cada medição, para ambas as partes, e adicionamos os comportamentos marginais. Assim, se $r = 2$, como assumido neste problema, desprezamos os resultados $a = b = 1$ de todas as medições. Um comportamento nesta notação é dado por:

   $$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\mathrm{CG}} = [&p_A\left(0|0\right), p_A\left(0|1\right), p_B\left(0|0\right), p_B\left(0|1\right), \\ &p\left(0,0|0,0\right), p\left(0,0|1,0\right), p\left(0,0|1,1\right), p\left(0,0|1,1\right)].\end{aligned}$$

   - Na *representação de correlatores* um comportamento é dado por:

   $$\mathbf{p}_{\mathrm{Corr}} = \left[\langle A_0\rangle, \langle A_1\rangle, \langle B_0\rangle, \langle B_1\rangle, \langle A_0B_0\rangle, \langle A_1B_0\rangle, \langle A_0B_1\rangle, \langle A_1B_1\rangle\right],$$

   onde

   $$\begin{aligned}\langle A_xB_y\rangle &= p\left(a = b|x,y\right) - p\left(a \neq b|x,y\right), \\ \langle A_x\rangle &= p_A\left(0|x\right) - p_A\left(1|x\right), \\ \langle B_y\rangle &= p_B\left(0|y\right) - p_B\left(1|y\right).\end{aligned}$$

   (a) Obtenha cada uma das 16 componentes $p\left(a,b|x,y\right)$ de $\mathbf{p}$ em termos das 8 componentes tanto de $\mathbf{p}_{\mathrm{CG}}$ quanto de $\mathbf{p}_{\mathrm{Corr}}$.

   (b) Obtenha a desigualdade CHSH na representação de Collins-Gisin.

   (c) Obtenha os pontos determinísticos locais na representação de correlatores.

3. Mostre que se um comportamento é local no cenário $(2, 2, 2)$, então ele satisfaz a desigualdade CHSH.

4. Mostre que se um comportamento é local no cenário $(2,2,2)$, e

$$p\,(0,0|0,0) = p\,(0,1|1,0) = p\,(1,0|0,1) = 0,$$

então $p\,(0,0|1,1) = 0$.

5. Considere a seguinte família, a dois parâmetros $\alpha, \beta \in [0,1]$, de comportamentos não-sinalizantes do cenário $(2,2,2)$:

$$\mathbf{p}\,(\alpha,\beta) = \alpha \mathbf{p}_{PR} + (1-\alpha)\left[\beta \mathbf{p}_L + (1-\beta)\,\mathbf{p}_I\right],$$

onde $\mathbf{p}_L = [p\,(0,0|x,y) = 1,\, \forall\, x,y]$, $\mathbf{p}_I = [p\,(a,b|x,y) = 1/4,\, \forall\, a,b,x,y]$, e $\mathbf{p}_{PR}$ tem componentes:

$$p(a,b|x,y) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } a \oplus b = x.y, \\ 0, & \text{senão.} \end{cases}$$

Através de programação linear, obtenha numericamente o menor valor de α, denotado $\bar{\alpha}$, em função de ao menos 20 valores de β no intervalo $[0,1]$ tal que $\mathbf{p}\,(\bar{\alpha},\beta)$ seja local. Faça um gráfico de $\bar{\alpha}$ em função de β.