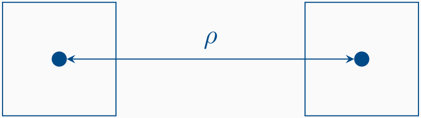
Fundamentos de teoria quântica

Aula 10: Steering

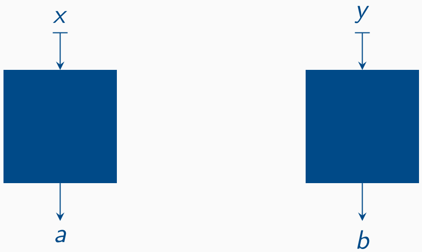
Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física “Gleb Wataghin”
Universidade Estadual de Campinas

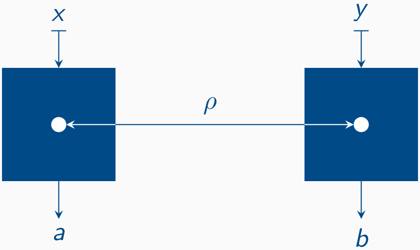
Cenário de emaranhamento



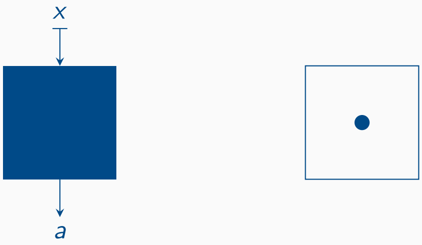
Cenário de Bell



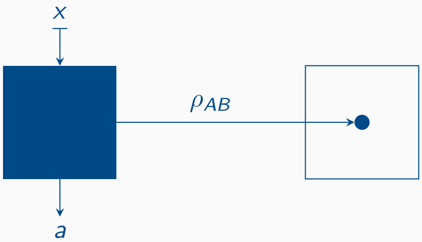
Cenário de Bell quântico



Cenário de Steering



Cenário de Steering com estado compartilhado



Assemblage

A melhor descrição disponível de um experimento de *steering* é dada pelo *assemblage* – a coleção de distribuições de probabilidades condicionais para os possíveis resultados das medições de Alice, $p\left(a|x\right)$, e os respectivos estados, pós-medição, do subsistema de Bob, $\rho\left(a|x\right)$:

$$\left\{p\left(a|x\right), \rho\left(a|x\right)\right\}.$$

Assemblage

O *assemblage* pode ser resumido em uma coleção de estados subnormalizados do subsistema de Bob, pós-medição:

$$\{\sigma\left(a|x\right)\},$$

onde, para todo a e x, $\sigma\left(a|x\right) = p\left(a|x\right)\rho\left(a|x\right)$.

Assemblage quântico

Um assemblage é dito *quântico* se existem um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, um estado ρ_{AB} atuando em $\mathcal{H}$, e um POVM $\left\{E_{a|x}\right\}$ com efeitos atuando em $\mathcal{H}$ tais que

$$\sigma\left(a|x\right) = \mathrm{Tr}_A\left(\left(E_{a|x} \otimes \mathbb{1}\right)\rho_{AB}\right).$$

Assemblage não-sinalizante

Um *assemblage* é dito *não-sinalizante* se, para todo par de medições $x \neq x'$,

$$\sum_a \sigma\left(a|x\right) = \sum_a \sigma\left(a|x'\right) = \rho_B.$$

Todo *assemblage* quântico é não-sinalizante, e

$$\rho_B = \mathrm{Tr}_A\left(\rho_{AB}\right).$$

Assemblage local

Um *assemblage* é dito *local*, ou *não-dirigido*, se existem uma variável λ no passado comum dos eventos de medição de Alice e Bob, distribuições de probabilidade $\{p\left(a|x,\lambda\right)\}$ e $\{p\left(\lambda\right)\}$, e um conjunto de estados $\{\rho\left(\lambda\right)\}$ do sistema quântico de Bob tais que

$$\sigma\left(a|x\right) = \int p\left(a|x,\lambda\right)\rho\left(\lambda\right)p\left(\lambda\right).$$

Neste caso, diz-se que o *assemblage* admite um *modelo local de estados ocultos* (LHS).

Modelos LHS

Assim como no caso de modelos locais de variáveis ocultas, é possível atribuir toda a aleatoriedade para escolha da variável λ, e tomar apenas comportamentos determinísticos locais para Alice:

$$\begin{aligned}\sigma\left(a|x\right) &= \sum_{\lambda} p_D\left(a|x,\lambda\right)\rho\left(\lambda\right)p\left(\lambda\right)\\ &= \sum_{\lambda} p_D\left(a|x,\lambda\right)\sigma\left(\lambda\right),\end{aligned}$$

onde $\sigma\left(\lambda\right) = p\left(\lambda\right)\rho\left(\lambda\right)$.

Estados unsteerable

Um estado ρ_{AB} é dito *unsteerable*, ou *não-dirigível*, se, para todo POVM $\left\{E_{a|x}\right\}$ com efeitos atuando no espaço de Hilbert do sistema de Alice $\mathcal{H}_A$, o *assemblage* resultante admite um modelo LHS, ou seja, se existem λ, $\{p\,(a|x,\lambda)\}$, $\{p\,(\lambda)\}$, e $\{\rho\,(\lambda)\}$ tais que

$$\sigma\,(a|x) = \mathrm{Tr}_A\left(\left(E_{a|x}\otimes\mathbb{1}\right)\rho_{AB}\right) = \int p\,(a|x,\lambda)\,\rho\,(\lambda)\,p\,(\lambda)\,d\lambda.$$

Todo estado *unsteerable* é local, e, portanto, admite um modelo LHV para todas as medições.

Condições necessárias para steering

Há duas condições necessárias para que seja possível observar *steering* em sistemas quânticos:

1. o estado ρ_{AB} deve ser emaranhado;
2. pelo menos um par de medições da caixa de Alice deve ser incompatível.

A condição 2. é necessária e também suficiente: para todo par de medições incompatíveis, existe um estado compartilhado a partir do qual é possível obter um *assemblage* não-LHS.

Prova de 1.

Suponha que ρ_{AB} é separável, e pode ser escrito como

$$\rho_{AB} = \sum_{\lambda} p\left(\lambda\right) \rho_A\left(\lambda\right) \otimes \rho_B\left(\lambda\right).$$

Então:

$$\begin{aligned}
\sigma\left(a|x\right) &= \mathrm{Tr}_A\left(\left(E_{a|x} \otimes \mathbb{1}\right) \rho_{AB}\right) \\
&= \sum_{\lambda} p\left(\lambda\right) \mathrm{Tr}\left(E_{a|x} \rho_A\left(\lambda\right)\right) \rho_B\left(\lambda\right) \\
&= \sum_{\lambda} p\left(\lambda\right) p\left(a|x, \lambda\right) \rho_B\left(\lambda\right).
\end{aligned}$$

Prova de 2.

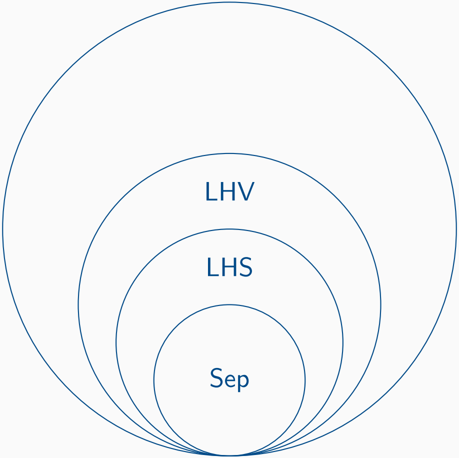
Suponha que todas as medições de Alice sejam compatíveis. Isso significa que existe um POVM $\{N_\lambda\}$ e distribuições de probabilidade $\{p(a|x,\lambda)\}$ e $\{p(\lambda)\}$ tais que

$$E_{a|x} = \int p(a|x,\lambda) N_\lambda p(\lambda)\, d\lambda.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\sigma(a|x) &= \mathrm{Tr}_A\left(\left(E_{a|x} \otimes \mathbb{1}\right)\rho_{AB}\right) \\
&= \int p(a|x,\lambda)\, \mathrm{Tr}_A\left(\left(N_\lambda \otimes \mathbb{1}\right)\rho_{AB}\right) p(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int p(a|x,\lambda)\, \rho(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Conjuntos de estados



Certificação de steering: SDP

$$\begin{aligned} \text{dados} \quad & \{\sigma(a|x)\}, \{p_D(a|x,\lambda)\} \\ \text{encontre} \quad & \{\rho(\lambda)\} \\ \text{sujeito a} \quad & \sigma(a|x) = \sum_{\lambda} p_D(a|x,\lambda)\, \sigma(\lambda), \ \forall\, a, x, \\ & \sigma(\lambda) \geq 0, \ \forall\, \lambda. \end{aligned}$$

Desigualdades ótimas de steering

$$
\begin{aligned}
\text{dados} \quad & \left\{\sigma\left(a|x\right)\right\}, \left\{p_D\left(a|x,\lambda\right)\right\} \\
\min_{\left\{F_{a|x}\right\}} \quad & \mathrm{Tr}\left(\sum_{a,x} F_{a|x}\sigma\left(a|x\right)\right) \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{a,x} F_{a|x} p_D\left(a|x,\lambda\right) \geq 0, \ \forall\, \lambda, \\
& \mathrm{Tr}\left(\sum_{a,x,\lambda} F_{a|x} p_D\left(a|x,\lambda\right)\right) = 1.
\end{aligned}
$$

Quantificando steering

Todo *assemblage* pode ser decomposto como combinação convexa de um *assemblage* não-local $\{\gamma\left(a|x\right)\}$ com um *assemblage* local $\{\sigma_{LHS}\left(a|x\right)\}$:

$$\sigma\left(a|x\right) = p\gamma\left(a|x\right) + \left(1-p\right)\sigma_{LHS}\left(a|x\right),\ \forall a, x.$$

O menor valor de p para o qual vale a decomposição pode ser visto como um quantificador: o *peso de steering*.

O peso de steering: SDP

$$
\begin{aligned}
\text{dados} \quad & \{\sigma(a|x)\}, \{p_D(a|x,\lambda)\} \\
\min_{p,\{\gamma(a|x)\},\{\sigma(\lambda)\}} \quad & p \\
\text{sujeito a} \quad & \sigma(a|x) = p\gamma(a|x) + (1-p)\,\sigma_{LHS}(a|x)\,,\ \forall a,x, \\
& \sigma_{LHS}(a|x) = \sum_\lambda p_D(a|x,\lambda)\,\sigma(\lambda)\,,\ \forall\ a,x, \\
& \mathrm{Tr}\left(\sum_a \gamma(a|x)\right) = 1,\ \forall\ x, \\
& \mathrm{Tr}\left(\sum_\lambda \sigma(\lambda)\right) = 1, \\
& \gamma(a|x) \geq 0,\ \forall\ a,x; \quad \sigma(\lambda) \geq 0,\ \forall\ \lambda.
\end{aligned}
$$

O peso de steering: SDP simplificado

$$
\begin{aligned}
\text{dados} \quad & \{\sigma(a|x)\}, \{p_D(a|x,\lambda)\} \\
\min_{\{\tilde{\sigma}(\lambda)\}} \quad & 1 - \mathrm{Tr}\left(\sum_\lambda \tilde{\sigma}(\lambda)\right) \\
\text{sujeito a} \quad & \sigma(a|x) - \sum_\lambda p_D(a|x,\lambda)\, \tilde{\sigma}(\lambda) \geq 0, \ \forall\, a, x, \\
& \tilde{\sigma}(\lambda) \geq 0, \ \forall\, \lambda.
\end{aligned}
$$