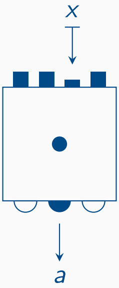
Fundamentos de teoria quântica

Aula 11: Contextualidade de Bell, Kochen e Specker

Rafael Rabelo – rabelo@ifi.unicamp.br

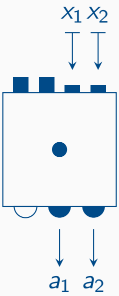
Departamento de Física da Matéria Condensada
Instituto de Física "Gleb Wataghin"
Universidade Estadual de Campinas

Caixa de medição



$$p\left(a|x\right).$$

Medições compatíveis



$$p\left(a_1, a_2 \middle| x_1, x_2\right).$$

Contextos

Considere uma caixa de medição com conjunto de medições $\mathcal{X}$, de cardinalidade $|\mathcal{X}| = m$, cada uma das quais com conjunto de resultados $\mathcal{A}$, de cardinalidade $\mathcal{A} = r$. Seja $P(\mathcal{X})$ o *powerset*, ou *conjunto potência* de $\mathcal{X}$. O conjunto de *contextos* da caixa é um conjunto $\mathcal{C} \subseteq P(\mathcal{X})$ cujos elementos denotam conjuntos de medições mutuamente compatíveis.

Contextos maximais

O conjunto $\mathcal{C}_M \subseteq \mathcal{C}$ de *contextos maximais* é o conjunto de contextos tais que, para quaisquer dois contextos $c_i \neq c_j \in \mathcal{C}_M$, $c_i \nsubseteq c_j$.

Em geral, pode-se tomar $\mathcal{C}_M$ como o conjunto de contextos efetivos de uma caixa de medição sem perda de generalidade.

Distribuições conjuntas

Suponha, por simplicidade, que todos os contextos maximais de determinada caixa de medição tenham dois elementos. Assim, para toda dupla de medições $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{C}$, existe uma distribuição de probabilidades conjunta dos respectivos resultados a_1 e a_2:

$$\{p\left(a_1, a_2 | x_1, x_2\right)\}.$$

Comportamentos

O *comportamento* de uma caixa de medição com contextos é o conjunto de todas as distribuições de probabilidades para todos os possíveis contextos.

Estas distribuições são organizadas na forma de um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^D$. No caso geral,

$$D = \prod_{i=1}^{|\mathcal{C}|} r^{|c_i|},$$

onde $c_i \in \mathcal{C}$.

Vínculos

Todo comportamento deve satisfazer às *condições de não-negatividade*,

$$p\left(a_1,\dots,a_n|x_1,\dots,x_n\right)\geq 0,\ \forall\ \left\{a_1,\dots,a_n\right\},\left\{x_1,\dots,x_n\right\}\in\mathcal{C},$$

e às *condições de normalização*,

$$\sum_{a_1,\dots,a_n} p\left(a_1,\dots,a_n|x_1,\dots,x_n\right)=1,\ \forall\ \left\{x_1,\dots,x_n\right\}\in\mathcal{C}.$$

Não-perturbação

Considere, por simplicidade, que todos os contextos maximais de uma caixa tenham dois elementos. Em geral, assume-se que a caixa obedece às *condições de não-perturbação*:

$$\sum_{a_2} p\left(a_1, a_2 | x_1, x_2\right) = \sum_{a_2'} p\left(a_1, a_2' | x_1, x_2'\right) = p\left(a_1 | x_1\right),$$

para quaisquer dois contextos $c = \{x_1, x_2\}$ e $c' = \{x_1, x_2'\}$ tais que $c \cap c' = x_1$, para todo $a_1 \in \mathcal{A}$ e $x_1 \in \mathcal{X}$.

O conjunto de comportamentos **p** não-perturbadores de uma caixa de medição é um politopo $\mathcal{P}_{NP} \in \mathbb{R}^d$, onde $d < D$.

Não-contextualidade

Um comportamento é dito *não-contextual* se, para todo contexto $\{x_1, x_2\} \in \mathcal{C}$, existem uma variável λ e distribuições de probabilidade $\{p(\lambda)\}$, $\{p(a_1|x_1, \lambda)\}$ e $\{p(a_2|x_2, \lambda)\}$ tais que os elementos do comportamento podem ser escritos como

$$p(a_1, a_2|x_1, x_2) = \int p(a_1|x_1, \lambda)\, p(a_2|x_2, \lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda.$$

Diz-se que comportamentos não-contextuais admitem um *modelo não-contextual de variáveis ocultas* (NCHV).

O conjunto de todos os comportamentos $\mathbf{p}$ não-contextuais de uma caixa de medição é um politopo $\mathcal{P}_{NC} \in R^d$.

Comportamentos não-contextualmente determinísticos

Um comportamento $\mathbf{p}$ é não-contextual se, e somente se, pode ser escrito como combinação convexa de *comportamentos não-contextualmente determinísticos*, pontos extremais de $\mathcal{P}_{NC}$:

$$\mathbf{p} = \sum_{\lambda=1}^{|\Lambda|} p\left(\lambda\right) \mathbf{p}_D\left(\lambda\right),$$

onde $|\Lambda| = r^{2m}$ e os elementos de $\mathbf{p}_D\left(\lambda\right)$ são

$$p\left(a_1, a_2 | x_1, x_2\right) = p_D\left(a_1 | x_1, \lambda\right) p_D\left(a_2 | x_2, \lambda\right);$$

e, por sua vez,

$$p_D\left(a_1 | x_1, \lambda\right), p_D\left(a_2 | x_2, \lambda\right) \in \left\{0, 1\right\},$$

para todo $a_1, a_2, x_1, x_2, \lambda$.

Desigualdades de contextualidade

Desigualdades de contextualidade são desigualdades lineares nos comportamentos da caixa de medição, satisfeitas por todos os comportamentos não-contextuais:

$$D = \mathbf{c}^T \mathbf{p} \leq d.$$

As desigualdades de contextualidade justas de um cenário estão associadas às facetas não-triviais do politopo de não-contextualidade.

Toda desigualdade de contextualidade pode ser escrita de forma que todas as entradas do vetor de coeficientes **c** sejam não-negativas.

Grafos e hipergrafos

Um *grafo* $\mathcal{G}$ é um objeto matemático definido pelo par $\mathcal{G} = (V, E)$, onde V é o seu *conjunto de vértices* e E é seu *conjunto de arestas*, cada uma das quais dada por um par (não-ordenado) de vértices.

Arestas com três ou mais vértices, se permitidas, são ditas *hiperarestas*; se presentes, tem-se um *hipergrafo*.

Grafos de compatibilidades

Em geral, é conveniente definir o *grafo de compatibilidades* de uma caixa de medição: associa-se o conjunto de todas as possíveis medições da caixa ao conjunto de arestas do grafo, $V = \mathcal{X}$, e associa-se o conjunto de contextos ao conjunto de (hiper)arestas do grafo, $E = \mathcal{C}$.

Comportamentos quânticos

Um comportamento $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_{NP}$ é *quântico* se existem um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, um estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, e medições projetivas $\left\{\Pi_{a|x}\right\}$ para todo $x \in \mathcal{X}$, tais que, para todo par de medições compatíveis (x_1, x_2), $\left[\Pi_{a_1|x_1}, \Pi_{a_2|x_2}\right] = 0$ para todo par (a_1, a_2), e os elementos do comportamento possam ser escritos como

$$p\left(a_1, a_2|x_1, x_2\right) = \langle\psi| \Pi_{a_1|x_1} \Pi_{a_2|x_2} |\psi\rangle .$$

Teorema de Bell-Kochen-Specker

Existem comportamentos quânticos que não admitem modelos não-contextuais de variáveis ocultas.

Desigualdade de KCBS

Considere um cenário onde uma caixa pode realizar 5 medições dicotômicas, com contextos $\mathcal{C} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,5\}\}$; em outros termos, o grafo de compatibilidades é um pentágono.

Neste cenário, a única* faceta não-trivial do politopo não-contextual é a *desigualdade de Klyachko, Can, Binicioglu e Shumovski* (KCBS):

$$D_{KCBS} = E(1,2) + E(2,3) + E(3,4) + E(4,5) - E(1,5) \leq 3,$$

onde

$$E(x_1, x_2) = p(a_1 = a_2 | x_1, x_2) - p(a_1 \neq a_2 | x_1, x_2).$$

Violação quântica de KCBS

Com a escolha adequada de estado e medições, é possível mostrar que a desigualdade KCBS é maximamente violada com um sistema quântico de dimensão 3, um *qutrit*. Sua violação quântica máxima é

$$D_{KCBS} \leq \frac{15\cos(\pi/5) - 5}{1 + \cos(\pi/5)} \approx 3.94.$$

Cenários n-ciclos

Considere cenários onde uma caixa pode realizar n medições dicotômicas, cada uma das quais compatível com as suas duas medições 'vizinhas', de forma que o grafo de compatibilidades seja um eneágono.

Nestes cenários, as facetas não-triviais do politopo não-contextual são dadas pelas desigualdades

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(i) \, E(x_i, x_{i+1}) \leq n - 2,$$

onde $x_{n+1} = x_1$, $\gamma(i) \in \{\pm 1\}$, para todo i, e o número de valores negativos de γ é ímpar.

Violação quântica

Nos cenários n-ciclos, com $n > 3$, há violação quântica das desigualdades de contextualidade. A violação quântica máxima, em função de n, é dada por

$$D_n \leq \begin{cases} \frac{3n\cos(\pi/n) - n}{1 + \cos(\pi/n)}, & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ n\cos\left(\pi/n\right), & \text{para } n \text{ par}. \end{cases}$$

Não-localidade e contextualidade

Não-localidade pode ser vista como um caso particular de contextualidade, onde, em um cenário de Bell, os contextos são dados por duplas (ou tuplas) de medições realizadas em diferentes subsistemas de um sistema compartilhado, e as condições de não-perturbação são justificadas pela separação espacial dos eventos de medições.

Eventos exclusivos

Considere dois eventos de medição $(a, b|x, y)$ e $(a', b'|x', y')$. Estes eventos são ditos *exclusivos* se ao menos uma das seguintes condições é verdadeira:

- $x = x'$, e $a \neq a'$.
- $y = y'$, e $b \neq b'$.

Grafo de exclusividade

O *grafo de exclusividade* associado a uma desigualdade de contextualidade é um grafo $G = (V, E)$ tal que:

- para cada evento de medição factível é associado um vértice $i \in V$;
- para cada par de eventos exclusivos, é colocada uma aresta $\{i, j\} \in E$ entre os vértices associados aos eventos.

Abordagem grafo-teórica para contextualidade

Se uma desigualdade de contextualidade associada à expressão D é escrita com coeficientes não-negativos, e G é o grafo de exclusividade associado à desigualdade, então valem as seguintes relações:

$$D \leq^{NC} \alpha\left(G\right) \leq^{Q} \vartheta\left(G\right) \leq^{GPT} \alpha^{*}\left(G\right),$$

onde $\alpha\left(G\right)$ é o *número de independência* de G, $\vartheta\left(G\right)$ é o *número de Lovász* de G, e $\alpha^{*}\left(G\right)$ é o *número de empacotamento fracional* de G.

O número de independência

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um *conjunto independente* $I(G)$ é um subconjunto de V no qual não existem arestas entre seus elementos, ou seja, para todo par $i, j \in I(G)$, $\{i, j\} \notin E$.

O *número de independência* de um grafo G é a cardinalidade do maior conjunto independente de G:

$$\alpha(G) = \max |I(G)| .$$

O número de empacotamento fracional

Considere uma atribuição de probabilidades aos vértices de um grafo $G = (V, E)$, ou seja, para cada vértice $i \in V$, atribua uma probabilidade $p(i)$. Ainda, faça com que esta atribuição respeite à condição de que, para todo *clique* K_G (subconjunto de vértices do grafo onde há arestas entre quaisquer dois elementos),

$$\sum_{i \in K_G} p(i) \leq 1.$$

Então, o *número de empacotamento fracional* é definido como

$$\alpha^*(G) = \max \sum_{i \in V} p(i),$$

onde o máximo é tomado sobre todas as atribuições de probabilidades que respeitam as regras descritas.

Representações ortogonais

Uma *representação ortogonal* de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição de vetores aos vértices de G – para cada vértice $i \in V$ é atribuído um vetor $|v_i\rangle \in R^d$ – de forma que a todo par de vértices adjacentes (entre os quais há uma aresta) os vetores atribuídos sejam ortogonais:

$$\langle i|j\rangle = 0, \; \forall \; \{i, j\} \in E.$$

O número de Lovász

O *número de Lovász* de um grafo $G = (V, E)$ é definido como

$$\vartheta(G) = \max \sum_{i \in V} |\langle v_i | \psi \rangle|^2 ,$$

onde o máximo é tomado sobre todas as suas representações ortogonais $\{v_i\}$ e sobre todos os vetores normalizados $|\psi\rangle$.

Formulação clássica do Teorema de Bell-Kochen-Specker

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão $d \geq 3$. Existe um conjunto S de observáveis atuando sobre $\mathcal{H}$ tal que as seguintes hipóteses são contraditórias:

- Todos os elementos de S têm valores determinados; o valor do observável A é denotado por $\nu(A)$.
- O valor $\nu(A)$ de um observável A é definido independentemente do contexto em que A é medido; se

  $$[A, B] = 0, \quad [A, C] = 0, \quad [B, C] \neq 0,$$

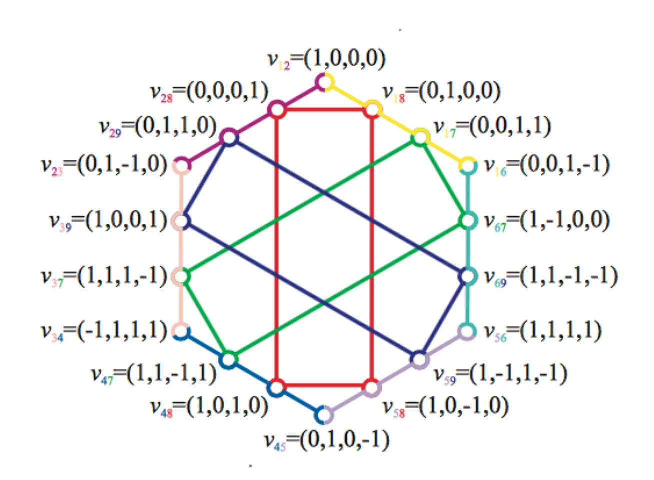
  então

  $$\nu(A)_{AB} = \nu(A)_{BC}.$$

Relações funcionais

- Se $[A, B] = 0$, e $f(A, B) = 0$, então $f(\nu(A), \nu(B)) = 0$.
- Se $[A, B] = 0$, e $C = A + B$, então $\nu(C) = \nu(A) + \nu(B)$.
- Se $[A, B] = 0$, e $C = AB$, então $\nu(C) = \nu(A)\,\nu(B)$.

A prova de Cabello,Estebaranz,García-Alcaine



A prova de Cabello,Estebaranz,García-Alcaine

Uma atribuição de valores aos projetores deve satisfazer:

$$\nu\left(v_{12}\right)+\nu\left(v_{16}\right)+\nu\left(v_{17}\right)+\nu\left(v_{18}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{12}\right)+\nu\left(v_{28}\right)+\nu\left(v_{29}\right)+\nu\left(v_{23}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{34}\right)+\nu\left(v_{37}\right)+\nu\left(v_{39}\right)+\nu\left(v_{23}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{45}\right)+\nu\left(v_{48}\right)+\nu\left(v_{47}\right)+\nu\left(v_{34}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{56}\right)+\nu\left(v_{59}\right)+\nu\left(v_{58}\right)+\nu\left(v_{45}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{16}\right)+\nu\left(v_{67}\right)+\nu\left(v_{69}\right)+\nu\left(v_{56}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{17}\right)+\nu\left(v_{37}\right)+\nu\left(v_{47}\right)+\nu\left(v_{67}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{18}\right)+\nu\left(v_{28}\right)+\nu\left(v_{48}\right)+\nu\left(v_{58}\right)=1$$
$$\nu\left(v_{29}\right)+\nu\left(v_{39}\right)+\nu\left(v_{59}\right)+\nu\left(v_{69}\right)=1.$$

No entanto, toda atribuição não-contextual leva a:

$$2\sum_{v}\nu\left(v\right)=9.$$

O quadrado de Peres-Mermin

O *quadrado de Peres-Mermin* é a seguinte matriz de observáveis de dois qubits, compatíveis entre si ao longo de cada linha e cada coluna:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x \\ \mathbb{1} \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \mathbb{1} & \sigma_y \otimes \sigma_y \\ \sigma_x \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_x & \sigma_z \otimes \sigma_z . \end{bmatrix}$$

O quadrado de Peres-Mermin

Os produtos dos observáveis ao longo das linhas e colunas são

$$
\begin{array}{ccc|c}
\sigma_x \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \sigma_x & \sigma_x \otimes \sigma_x & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\
\mathbb{1} \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \mathbb{1} & \sigma_y \otimes \sigma_y & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\
\sigma_x \otimes \sigma_y & \sigma_y \otimes \sigma_x & \sigma_z \otimes \sigma_z & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\
\hline
\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} & -\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} &
\end{array}
$$

O quadrado de Peres-Mermin

Assim, uma atribuição de valores aos observáveis deve satisfazer

$$\nu(A_{11})\,\nu(A_{12})\,\nu(A_{13}) = 1$$
$$\nu(A_{21})\,\nu(A_{22})\,\nu(A_{23}) = 1$$
$$\nu(A_{31})\,\nu(A_{32})\,\nu(A_{33}) = 1$$
$$\nu(A_{11})\,\nu(A_{21})\,\nu(A_{31}) = 1$$
$$\nu(A_{12})\,\nu(A_{22})\,\nu(A_{32}) = 1$$
$$\nu(A_{13})\,\nu(A_{23})\,\nu(A_{33}) = -1$$

No entanto, toda atribuição não-contextual leva a

$$\prod_{ij} \left(\nu(A_{ij})\right)^2 = -1.$$