

# Fundamentos de teoria quântica

## Aula 8: Não-localidade de Bell

---

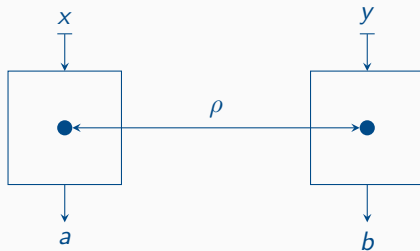
Rafael Rabelo – [rabelo@ifi.unicamp.br](mailto:rabelo@ifi.unicamp.br)

Departamento de Física da Matéria Condensada  
Instituto de Física “Gleb Wataghin”  
Universidade Estadual de Campinas

Uma *teoria probabilística geral* (GPT) associa objetos e regras matemáticas a procedimentos operacionais – preparações, transformações e medições – , permitindo, por meio destes objetos, o cálculo das probabilidades dos possíveis resultados de uma medição realizada sobre um sistema fruto de uma preparação seguida de uma transformação.

Uma teoria probabilística é dita *local* se todos os comportamentos por ela permitidos em um cenário de Bell são locais.

# Cenário de Bell quântico



Se, em um cenário de Bell, as caixas realizam medições sobre sistemas quânticos, as componentes do comportamento  $\mathbf{p}$  das caixas são dadas pela regra de Born:

$$p(a, b|x, y) = \text{Tr}(\rho E_{a|x} \otimes F_{b|y}),$$

onde  $\rho$  é o estado do sistema quântico compartilhado por Alice e Bob,  $\{E_{a|x}\}$  é um POVM associado à medição  $x$  de Alice, para todo  $x$ , e  $\{F_{b|y}\}$  é um POVM associado à medição  $y$  de Bob, para todo  $y$ .

Inversamente, um comportamento  $\mathbf{p}$  pertence a  $\mathcal{P}_Q$ , o *conjunto dos comportamentos quânticos* de um cenário de Bell, se existem espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , um operador densidade  $\rho$  atuando em  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , e POVMs  $\{E_{a|x}\}$  com efeitos atuando em  $\mathcal{H}_A$ , para todo  $x$ , e  $\{F_{b|y}\}$  com efeitos atuando em  $\mathcal{H}_B$ , para todo  $y$ , tais que

$$p(a, b|x, y) = \text{Tr}(\rho E_{a|x} \otimes F_{b|y}).$$

# O conjunto de comportamentos quânticos

O conjunto  $\mathcal{P}_Q$  tem as seguintes propriedades:

- Comportamentos quânticos são não-sinalizantes,  $\mathcal{P}_Q \subseteq \mathcal{P}_{NS}$ .
- Todo comportamento local pode ser obtido em um cenário de Bell quântico,  $\mathcal{P}_L \subseteq \mathcal{P}_Q$ .
- O conjunto  $\mathcal{P}_Q$  é convexo, mas contém um número infinito de pontos extremais, e, portanto, não é um politopo.

Lembrando: uma desigualdade de Bell

$$D(\mathbf{p}) = \mathbf{c}^T \mathbf{p} = \sum_{a,b,x,y} c(a,b,x,y) p(a,b|x,y) \leq d_L,$$

onde  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  é um vetor de coeficientes,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  é um comportamento e  $d_L \in \mathbb{R}$  é a cota local da desigualdade, é uma desigualdade linear nos comportamentos satisfeita por todos os comportamentos locais.



## Desigualdades de Bell em cenários quânticos

Seja  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_Q$ , de forma que

$$p(a, b|x, y) = \text{Tr}(\rho E_{a|x} \otimes F_{b|y}),$$

onde  $\rho$  é o estado do sistema, e  $\{E_{a|x}\}$  e  $\{F_{b|y}\}$  são os POVMs de Alice e Bob, respectivamente.

Neste contexto, uma desigualdade de Bell pode ser escrita como

$$D(\mathbf{p}) = \mathbf{c}^T \mathbf{p} = \text{Tr}(\rho G) \leq d_L,$$

onde

$$G = \sum_{a,b,x,y} c(a, b, x, y) (E_{a|x} \otimes F_{b|y})$$

é um observável associado à desigualdade.

## Observável da desigualdade CHSH

Considere um cenário de Bell quântico no qual o espaço de Hilbert do sistema é  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . A desigualdade CHSH pode ser escrita como

$$D_{\text{CHSH}}(\mathbf{p}) = \langle G_{\text{CHSH}} \rangle = \text{Tr}(\rho G) \leq 2,$$

onde

$$G_{\text{CHSH}} = A_0 \otimes B_0 + A_1 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 - A_1 \otimes B_1,$$

e  $\{A_x\}$  e  $\{B_y\}$  são observáveis de espectro  $\{\pm 1\}$  atuando em  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , associados às medições  $x$  e  $y$ , respectivamente.

A teoria quântica não é uma teoria local.

Considere um cenário de Bell quântico no qual o espaço de Hilbert do sistema é  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Suponha que:

- o estado do sistema seja o estado de Bell  $|\phi^+\rangle$ ,
- os observáveis associados às medições de Alice sejam

$$A_0 = \sigma_x, \quad A_1 = \sigma_z,$$

- os observáveis associados às medições de Bob sejam

$$B_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

Então,

$$\langle G_{\text{CHSH}} \rangle = \langle \phi^+ | G_{\text{CHSH}} | \phi^+ \rangle = 2\sqrt{2}.$$

# Condições para não-localidade quântica

Duas condições devem ser satisfeitas para que sistemas quânticos sejam capazes de gerar comportamentos não-locais:

- Pelo menos um par de medições de cada uma das partes deve ser *incompatível*; em outras palavras, para pelo menos um par de medições  $(x, x')$ , deve ser impossível definir uma distribuição conjunta de seus resultados,  $\{p(a, a' | x, x')\}$  que recupera as distribuições individuais por marginalização.
- O estado do sistema composto deve ser emaranhado.

Ambas as condições são necessárias, mas não suficientes.

## Máxima violação de CHSH: 2 qubits

Um operador densidade  $\rho$  atuando em  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  pode ser escrito como

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{s} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right).$$

Sejam  $Y = t^T t$ , e  $y_1$  e  $y_2$  os dois maiores autovalores de  $Y$ .

A máxima violação da desigualdade CHSH para o estado  $\rho$ , sobre todos os possíveis pares de medições de Alice e Bob, é

$$\max \langle G_{\text{CHSH}} \rangle = 2\sqrt{y_1 + y_2}.$$

## Máxima violação de CHSH: estados puros de 2 qubits

Seja  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , escrito em sua base de Schmidt

$$|\psi\rangle = \cos(\phi) |00\rangle + \sin(\phi) |11\rangle,$$

onde  $\phi \in [0, \pi/4]$ .

A máxima violação da desigualdade CHSH para o estado  $|\psi\rangle$ , sobre todos os possíveis pares de medições de Alice e Bob, é

$$\max \langle G_{\text{CHSH}} \rangle = 2\sqrt{1 + \sin^2(2\phi)}.$$

Todo estado puro emaranhado de um sistema quântico bipartido  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  viola a desigualdade CHSH.



Seja  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , escrito em sua base de Schmidt, com coeficientes ordenados decrescentemente:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i=0}^{d-1} c_i |ii\rangle, c_0 \geq \dots \geq c_{d-1} \\ &= \sum_{j=0}^{d/2-1} \sqrt{p_j} [\cos(\phi_j) |2j, 2j\rangle + \sin(\phi_j) |2j+1, 2j+1\rangle], \end{aligned}$$

onde  $\sum_j p_j = 1$ .

Da aplicação da máxima violação de CHSH para estados puros de 2 qubits, segue que:

$$\max \langle G_{\text{CHSH}} \rangle \geq \sum_j p_j 2\sqrt{1 + \sin^2(2\phi_j)}.$$

Se  $|\psi\rangle$  é emaranhado,  $c_2 > 0$  e, assim, a desigualdade CHSH é violada.

Um estado  $\rho$ , atuando em  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , é dito *local* se, em *todo* cenário de Bell bipartido, todos os possíveis comportamentos obtidos por meio de medições locais em  $\rho$  são locais.

Em outros termos,  $\rho$  é local se para *todos* POVMs  $\{E_{a|x}\}$  e  $\{F_{b|y}\}$  atuando em  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, existem  $p(\lambda)$ ,  $p(a|x, \lambda)$  e  $p(b|y, \lambda)$  tais que

$$p(a, b|x, y) = \int p(a|x, \lambda) p(b|y, \lambda) p(\lambda) d\lambda.$$

Um estado  $\rho$  é dito não-local se não é local.

Os estados de Werner de 2 qubits são escritos como

$$\rho(w) = w |\psi^-\rangle\langle\psi^-| + (1-w) \frac{\mathbb{1}}{4},$$

onde  $w \in [-1/3, 1]$  e  $|\psi^-\rangle$  é um dos estados de Bell, o estado *singleto*.

- $\rho(w)$  é separável para  $w \leq 1/3$ .
- $\rho(w)$  é local para MPs para  $w \lesssim 0.682$ .
- $\rho(w)$  é local para POVMs para  $w \lesssim 0.455$ .
- $\rho(w)$  é não-local para  $w \gtrsim \sqrt{2}/2 \sim 0.707$ .

A máxima violação da desigualdade CHSH sobre todos os comportamentos quânticos é

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_Q} D_{\text{CHSH}}(\mathbf{p}) = 2\sqrt{2}.$$

Considere o observável associado à desigualdade CHSH

$$G_{\text{CHSH}} = A_0 \otimes B_0 + A_1 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 - A_1 \otimes B_1,$$

onde  $\{A_x\}$  e  $\{B_y\}$  são observáveis de espectro  $\{\pm 1\}$ .

Seu quadrado é

$$G_{\text{CHSH}}^2 = 4\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + [A_0, A_1] \otimes [B_0, B_1].$$

Seja  $\|O\|$  o maior autovalor de  $O$ . Como  $\|[O_1, O_2]\| \leq 2 \|O_1\| \|O_2\|$ :

$$\|G_{\text{CHSH}}^2\| \leq 4 + 4 \|A_0\| \|A_1\| \|B_0\| \|B_1\| \leq 8.$$

Portanto,

$$\|G_{\text{CHSH}}\| \leq 2\sqrt{2}.$$

Considere o observável associado à desigualdade CHSH

$$G_{\text{CHSH}} = A_0 \otimes B_0 + A_1 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 - A_1 \otimes B_1,$$

onde  $\{A_x\}$  e  $\{B_y\}$  são observáveis de espectro  $\{\pm 1\}$  atuando em  $\mathbb{C}^2$ .

A decomposição espectral de  $G_{\text{CHSH}}$ , a menos de unitárias locais, é:

$$G_{\text{CHSH}} = \lambda_1 |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \lambda_2 |\phi^-\rangle\langle\phi^-| - \lambda_1 |\psi^+\rangle\langle\psi^+| - \lambda_2 |\psi^-\rangle\langle\psi^-|,$$

onde  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 8$ .

# O observável da desigualdade de Bell

Considere uma desigualdade de Bell

$$D(\mathbf{p}) = \mathbf{c}^T \mathbf{p} \leq d.$$

O funcional

$$D(\rho, \{E_{a|x}\}, \{F_{b|y}\}) = \sum_{a,b,x,y} c(a,b,x,y) \text{Tr}(\rho E_{a|x} \otimes F_{b|y})$$

é linear em  $\rho$ ,  $\{E_{a|x}\}$  ou  $\{F_{b|y}\}$ , individualmente, quando os demais argumentos são mantidos constantes, onde  $\rho$  atua em  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  e  $\{E_{a|x}\}$  e  $\{F_{b|y}\}$  são POVMs locais de Alice e Bob, respectivamente atuando em  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ .

## O algoritmo see-saw

O seguinte algoritmo iterativo converge para uma cota inferior da máxima violação quântica de uma desigualdade de Bell:

1. Dadas dimensões locais  $d_A$  e  $d_B$ , sorteie POVMs  $\{E_{a|b}\}$  atuando em  $\mathbb{C}^{d_A}$  e  $\{F_{b|y}\}$  atuando em  $\mathbb{C}^{d_B}$ ;
2. Construa o observável  $G$  associado à desigualdade, obtenha o autovetor  $|\psi\rangle$  associado ao maior autovalor, e faça  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ;
3. Maximize  $D(\rho, \{E_{a|x}\}, \{F_{b|y}\})$  sobre  $\{E_{a|x}\}$ , mantendo  $\rho$  e  $\{F_{b|y}\}$  fixos.
4. Maximize  $D(\rho, \{E_{a|x}\}, \{F_{b|y}\})$  sobre  $\{F_{b|y}\}$ , mantendo  $\rho$  e  $\{E_{a|x}\}$  fixos.
5. Volte ao passo 2., e repita até convergência.

O algoritmo *see-saw* converge para um máximo local de  $D(\rho, \{E_{a|x}\}, \{F_{b|y}\})$ ; é recomendável, portanto, tomar vários pontos iniciais distintos.



## Otimização sobre as medições de Alice: SDP

$$\begin{array}{ll} \text{dados} & c, \rho, \{F_{b|y}\} \\ \text{maximize} & \sum_{a,b,x,y} c(a,b,x,y) \text{Tr}(\rho E_{a|x} \otimes F_{b|x}) \\ \text{sujeito a} & E_{a|x} \succeq 0, \forall a, x \\ & \sum_a E_{a|x} = \mathbb{1}, \forall x. \end{array}$$

Seja  $\{E_{a|x}\}$  um POVM atuando em  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ . Existe um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}' = \mathbb{C}^{d'}$ , com  $d' \geq d$ , e uma medição projetiva  $\{\Pi_{a|x}\}$  atuando em  $\mathcal{H}$  tais que

$$E_{a|x} = P_{\mathcal{H}} \Pi_{a|x} P_{\mathcal{H}},$$

onde  $P_{\mathcal{H}}$  é o projetor no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Como consequência, se  $\rho$  atua em  $\mathcal{H}$  e  $|\psi\rangle$  é uma purificação de  $\rho$  em  $\mathcal{H}'$ , então

$$p(a|x) = \text{Tr}(\rho E_{a|x}) = \langle \psi | \Pi_{a|x} | \psi \rangle.$$

## Comportamentos quânticos (2)

Um comportamento  $\mathbf{p}$  é dito *quântico* se existem espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , um vetor  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , e medições projetivas  $\{E_{a|x}\}$  com projetores atuando em  $\mathcal{H}_A$ , para todo  $x$ , e  $\{F_{b|y}\}$  com projetores atuando em  $\mathcal{H}_B$ , para todo  $y$ , tais que

$$p(a, b|x, y) = \langle \psi | E_{a|x} \otimes F_{b|y} | \psi \rangle.$$

Denota-se  $\mathcal{P}_Q$  o conjunto de todos os comportamentos quânticos de um cenário de Bell.

Um comportamento  $\mathbf{p}$  pertence ao conjunto  $\mathcal{P}_{Q'}$  se existem um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , um operador densidade atuando em  $\mathcal{H}$ , e POVMs  $\{E_{a|x}\}$  e  $\{F_{b|y}\}$ , todos com efeitos atuando em  $\mathcal{H}$ , satisfazendo

$$[E_{a|x}, F_{b|y}] = 0, \forall a, b, x, y,$$

tais que

$$p(a, b|x, y) = \text{Tr}(\rho E_{a|x} F_{b|y}).$$

É fácil ver que  $\mathcal{P}_Q \subseteq \mathcal{P}_{Q'}$ . Tsirelson alegou ser possível provar que  $\mathcal{P}_Q = \mathcal{P}_{Q'}$ , mas retirou a alegação. Sabe-se hoje que:

- Se  $\mathbf{p}$  pode ser obtido com espaços de Hilbert de dimensão finita, então  $\mathbf{p}$  pertence tanto a  $\mathcal{P}_Q$  quanto a  $\mathcal{P}_{Q'}$ .
- Em alguns cenários de Bell, incluindo o cenário  $(2, 2, 2)$ ,  $\mathcal{P}_Q = \mathcal{P}_{Q'}$ .
- Descobriu-se recentemente que  $\mathcal{P}_Q$  não é, em geral, um conjunto fechado; resta saber se seu fecho é igual, ou está estritamente contido, em  $\mathcal{P}_{Q'}$ .

A *desigualdade de Tsirelson-Landau-Masanes* (TLM) é uma desigualdade não-linear nos comportamentos do cenário  $(2, 2, 2)$ , que delimita parte da fronteira do conjunto de comportamentos quânticos. Na notação de correlatores, ela é definida no subespaço no qual

$$\langle A_0 \rangle = \langle A_1 \rangle = \langle B_0 \rangle = \langle B_1 \rangle = 0,$$

e é dada por

$$\arcsin(\langle A_0 B_0 \rangle) + \arcsin(\langle A_1 B_0 \rangle) + \arcsin(\langle A_0 B_1 \rangle) - \arcsin(\langle A_1 B_1 \rangle) \leq \pi.$$

A *hierarquia de Navascués-Pironio-Acín* (NPA) é uma hierarquia de programas semi-definidos que modelam aproximações exteriores, ou relaxações, do conjunto de comportamentos quânticos de um dado cenário de Bell.

Seja  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$  uma coleção de operadores lineares atuando sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então, para todo estado  $\rho$  atuando sobre  $\mathcal{H}$ , a matriz hermitiana  $\Gamma(\rho, \mathcal{F})$  cujas entradas são

$$\Gamma_{ij} = \text{Tr}(\rho F_i^\dagger F_j)$$

é positiva semi-definida.



Seja  $|\psi\rangle$  um vetor arbitrário de  $\mathbb{C}^n$ . Então

$$\begin{aligned} \langle \psi | \Gamma | \psi \rangle &= \sum_i \sum_j \psi_i^* \text{Tr}(\rho F_i^\dagger F_j) \psi_j \\ &= \text{Tr} \left( \rho \left[ \sum_i \psi_i^* F_i^\dagger \right] \left[ \sum_j \psi_j F_j \right] \right) \\ &= \text{Tr}(\rho C^\dagger C) \geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que tanto  $\rho$  quanto  $C^\dagger C$  são positivo semi-definidos.

Considere um cenário de Bell  $(2, m, r)$ , e suponha

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \mathbb{1}, \{E_{a|x}\}_{a,x}, \{F_{b|y}\}_{b,y} \right\},$$

associado à matriz  $\Gamma^1$ , onde, devido ao Teorema de Neumark, medições projetivas são assumidas. Sabendo-se o estado  $\rho$ , é possível calcular todas as entradas de  $\Gamma^1$ . No entanto, em uma abordagem independente de dispositivos, sabe-se o comportamento  $\mathbf{p}$ , mas não o estado do sistema, ou as medições realizadas.

Note que algumas entradas de  $\Gamma^1$  são dadas pelo comportamento  $\mathbf{p}$ :

$$\Gamma_{i'j'}^1 = \text{Tr} \left( \rho F_{i'}^\dagger F_{j'} \right) = \text{Tr} \left( \rho E_{a|x} F_{b|y} \right) = p(a, b|x, y).$$

Algumas outras, no entanto, são indeterminadas, como, e. g.:

$$\Gamma_{i''j''}^1 = \text{Tr} \left( \rho F_{i''}^\dagger F_{j''} \right) = \text{Tr} \left( \rho E_{a|x} E_{a'|x'} \right).$$

O lema garante, no entanto, que, se  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_{Q'}$ , então existem valores para as entradas indeterminadas tais que  $\Gamma^1 \succeq 0$ .

A condição  $\Gamma^1 \succeq 0$  é necessária para  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_Q$ , mas não suficiente. Denota-se  $\mathcal{P}_{Q_1}$  o conjunto de todos os comportamentos  $\mathbf{p}$  tais que  $\Gamma^1 \succeq 0$ ; é evidente que  $\mathcal{P}_Q \subseteq \mathcal{P}_{Q_1}$ .

## NPA: nível 1 – exemplo

Considere o cenário  $(2, 2, 2)$ , no qual, utilizando a representação de Collins-Gisin,

$$\mathcal{F}_1 = \{\mathbb{1}, E_{0|0}, E_{0|1}, F_{0|0}, F_{0|1}\}.$$

Um comportamento  $\mathbf{p}$  pertence a  $\mathcal{P}_{Q_1}$  se existem  $x, y \in \mathbb{C}$  tais que

$$\Gamma^1 = \begin{matrix} & \mathbb{1} & E_{0|0} & E_{0|1} & F_{0|0} & F_{0|1} \\ \mathbb{1} & \left( \begin{array}{ccccc} 1 & p_A(0|0) & p_A(0|1) & p_B(0|0) & p_B(0|1) \\ & p_A(0|0) & x & p(0,0|0,0) & p(0,0|0,1) \\ & & p_A(0|1) & p(0,0|1,0) & p(0,0|1,1) \\ & & & p_b(0|0) & y \\ & & & & p_b(0|1) \end{array} \right) & \succeq 0. \end{matrix}$$

No nível seguinte da hierarquia NPA, constrói-se a matriz  $\Gamma^2$  para a coleção

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \cup \left\{ \{E_{a|x} E_{a'|x'}\}, \{F_{b|y} F_{b'|y'}\}, \{E_{a|x} F_{b|y}\} \right\}.$$

Denota-se  $\mathcal{P}_{Q_2}$  o conjunto de todos os comportamentos  $\mathbf{p}$  tais que  $\Gamma^2 \succeq 0$ ; é evidente que  $\mathcal{P}_{Q_2} \subseteq \mathcal{P}_{Q_1}$ .

No  $n$ -ésimo nível da hierarquia NPA, constrói-se a matriz  $\Gamma^n$  para a coleção de todos os produtos de  $n$  ou menos projetores. Denota-se  $\mathcal{P}_{Q_n}$  o conjunto de todos os comportamentos  $\mathbf{p}$  tais que  $\Gamma^n \succeq 0$ .

Segue que

$$\mathcal{P}_{Q'} \subseteq \mathcal{P}_{Q_n} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_{Q_1}.$$

NPA ainda provaram que a hierarquia é convergente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{Q_n} = \mathcal{P}_{Q'}.$$

## Máxima violação quântica de uma desigualdade de Bell

É possível obter cotas superiores para a máxima violação quântica de uma desigualdade de Bell através da hierarquia NPA. Seja

$$D(\mathbf{p}) = \mathbf{c}^T \mathbf{p} \leq d_L$$

uma desigualdade de Bell de interesse.

O valor ótimo do seguinte SDP é uma cota superior para sua máxima violação quântica:

$$\begin{array}{ll} \text{dados} & c, n \\ \text{maximize} & \mathbf{c}^T \mathbf{p} \\ \text{sujeito a} & \Gamma^n(\mathbf{p}) \succeq 0, \end{array}$$

onde  $\Gamma^n(\mathbf{p})$  denota que, nas devidas entradas  $i'j'$ ,

$$\Gamma_{i'j'}^n = p(a, b|x, y).$$